Devoir Surveillé 8

correction

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On nommera $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

[1] *Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.*

f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ par composée de fonctions continues.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et produit de fonctions continues.

Continuité à gauche en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$

Continuité à droite en 0 : Tout d'abord notons que $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln(x)$. Par conséquent comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(1+x) = 0$, et que par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = 0$, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$.

$$\boxed{\text{Conclusion } f \text{ est aussi continue en 0, elle est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

[2] *Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*

Comme pour la question précédente f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudions la dérivabilité en 0.

Dérivabilité à gauche en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{X\to -\infty} -X\mathrm{e}^X = 0.$

Dérivabilité à droite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(1+x) - x\ln(x) = 0.$

$$\boxed{\text{Conclusion } f \text{ est dérivable en 0 en } f'(0)) = 0.}$$

[3] *Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. Qu'en déduit-on sur $(\mathscr{C})$?*

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -1.}$

On en déduit que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f.

[4] *Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera une équation. On précisera également la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).*

Au voisinage de 0, $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

Donc au voisinage de $+\infty$ $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.

Par conséquent, au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - \frac{1}{2} \text{ est asymptote à la courbe de } f.}$ Et comme $\frac{1}{3x} > 0$ au voisinage de $+\infty$ on en déduit que $\boxed{\text{la courbe est au dessus de son asymptote.}}$

[5] **5.1.** *Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction dérivée de f s'écrit sous la forme $f'(x) = 2xa(x)$ où a est une fonction que l'on précisera et dont on étudiera le signe.*

Sur $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = 2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)$.

On a donc $a(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}$ qui est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$a'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)^2} = \frac{-(x+2)}{2x(x+1)^2}.$$

Clairement cette dérivée est négative donc la fonction a est décroissante. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 0$ (par somme) donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a(x) > 0.}$$

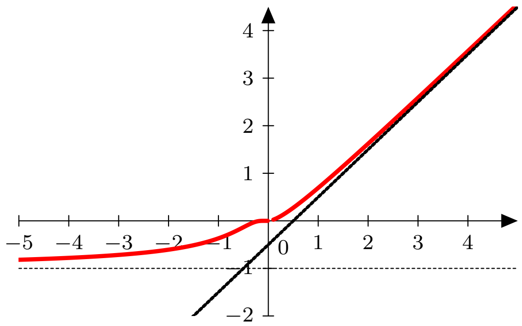
Donc $f'(x) > 0,\ \forall x > 0$.

5.2. *Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

Sur $\mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$. On en déduit avec la question précédente que la fonction f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

[6] *Construire $(\mathscr{C})$. On aura soin de commenter et d'annoter le schéma.*



À noter la présence d'une tangente horizontale en 0.

[7] *La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?*

Comme pour la question **[1]** et **[2]** f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Continuité de la dérivée à gauche en 0 : $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0 = f'(0)$

Continuité de la dérivée à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} 2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right) = \lim_{x\to0^+} 2x\ln(1+x) - 2x\ln(x) - \frac{x}{x+1} = 0 = f'(0)$$

$$\boxed{\text{Conclusion } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 2

[1] *Question préliminaire*

Le but de cette question est de calculer la somme $S_r(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} kx^{k-1}$ où r désigne un entier au moins égal à 1 et x un réel différent de 1. Pour cela on définit la fonction $T_r(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} x^k$.

1.1. *Quelle relation simple y a-t-il entre S_r et T_r ?*

$$\boxed{S_r(x) = T_r'(x)}$$

1.2. *Trouver une expression de $T_r(x)$ ne faisant plus apparaitre le symbole Σ.*

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison x d'où :

$$\boxed{T_r(x) = \frac{1-x^{r+1}}{1-x}}$$

1.3. *En déduire que* $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ S_r(x) = \dfrac{rx^{r+1} - (r+1)x^r + 1}{(1-x)^2}$

On dérive alors la nouvelle expression de T_r on obtient :

$$S_r(x) = T_r'(x) = \frac{(-1)(r+1)x^{r-1}(1-x) - (1-x^{r+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{rx^{r+1} - (r+1)x^r + 1}{(1-x)^2}$$

[2] *Première simulation informatique*

Rédiger une fonction pour Python, que l'on nommera `f1`*, qui reçoit un entier naturel n non nul et un réel p compris entre 0 et 1 et renvoie une simulation de n lancers sous la forme d'une liste de* `'P'` *et de* `'F'`*.*

```python
from random import random

def f1(n,p):
    res=[]
    for i in range(n):
        if random()<p:
            res.append('P')
        else:
            res.append('F')
    return res
```

[3] *Deuxième simulation informatique*

On a défini une fonction `f2` *comme suit :*

```python
def f2(liste):
    n = len(liste)
    i = 0
    while liste[i] == liste[i+1] and i < n-2:
        i = i + 1
    if i < n-2:
        return i+1
    elif liste[n-2] == liste[n-1]:
        return n
    else:
        return n-1
```

Que renverra Python si on appelle la fonction `f2` *dans les cas suivants :*

3.1. `f2(['F', 'F', 'F', 'P', 'F'])` f2 renvoie ici 3

3.2. `f2(['F', 'F', 'F', 'F', 'P'])` f2 renvoie ici 4

3.3. `f2(['P', 'P', 'P', 'P', 'P'])` f2 renvoie ici 5

3.4. *Que renvoie la fonction* `f2` *?*

De manière générale $\boxed{\texttt{f2}\text{ renvoie la longueur de la première série.}}$

[4] *Étude de la longueur de la première série*

On rappelle que l'on note L_1 la longueur de la première série.

4.1. *Déterminer l'ensemble $L_1(\Omega)$ des valeurs possibles pour L_1.*

$$\boxed{L_1(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

4.2. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$

4.2.1. *Exprimer l'événement $(L_1 = j)$ à l'aide d'événements du type P_i ou F_i définis dans le préambule.*

$$(L_1 = j) = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_j \cap F_{j+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_j \cap P_{j+1})$$

4.2.2. *En déduire le calcul de $P(L_1 = j)$.*

Par indépendance des lancers et par incompatibilité des deux événements décrits ci-dessus on a :

$$\boxed{P(L_1 = j) = p^j q + q^j p}$$

4.3. *Déterminer de même $P(L1 = n)$.*

$$(L_1 = n) = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$$

donc

$$\boxed{P(L_1 = n) = p^n + q^n}$$

4.4. *Vérifier que* $\displaystyle\sum_{j \in L_1(\Omega)} P(L_1 = j) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in L_1(\Omega)} P(L_1 = j) &= \sum_{j=1}^{n-1} P(L_1 = j) + P(L_1 = n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p^j q + q^j p + (p^n + q^n) \\
&= q \sum_{j=1}^{n-1} p^j + p \sum_{j=1}^{n-1} q^j + (p^n + q^n) \\
&= qp \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p} + pq \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + (p^n + q^n) \\
&= p - p^n + q - q^n + p^n + q^n \qquad\qquad q = 1 - p \text{ et } p = 1 - q \\
&= p + q = 1
\end{aligned}$$

4.5. *Montrer que* $E(L_1) = \dfrac{q}{p}(1 - q^n) + \dfrac{p}{q}(1 - p^n)$. *On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire.*

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= \sum_{j \in L_1(\Omega)} jP(L_1 = j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} jP(L_1 = j) + nP(L_1 = n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} jp^j q + jq^j p + n(p^n + q^n) \\
&= q \sum_{j=1}^{n-1} jp^j + p \sum_{j=1}^{n-1} jq^j + n(p^n + q^n) \\
&= qp \sum_{j=1}^{n-1} jp^{j-1} + pq \sum_{j=1}^{n-1} jq^{j-1} + n(p^n + q^n) \\
&= qp \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + pq \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + np^n + nq^n \\
&= \frac{p}{q}\Big((n-1)p^n - np^{n-1} + 1\Big) + \frac{q}{p}\Big((n-1)q^n - nq^{n-1} + 1\Big) + \frac{p}{q}(nqp^{n-1}) + \frac{q}{p}(npq^{n-1}) \\
&= \frac{p}{q}(1 - p^n) + \frac{q}{p}(1 - q^n)
\end{aligned}$$

4.6. *Déterminer la limite de $E(L_1)$ quand n tend vers $+\infty$ et que $p = q = \frac{1}{2}$.*

Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors $\frac{p}{q} = \frac{q}{p} = 1$ et $p^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'où

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E(L_1) = 2.}$$

[5] *Étude de la longueur de la deuxième série*

On rappelle que l'on note L_2 la longueur de la deuxième série.

5.1. *Déterminer l'ensemble $L_2(\Omega)$ des valeurs possibles pour L_2.*

$$\boxed{L_2(\Omega) = [\![0, n-1]\!].}$$

5.2. *Les variables L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? Justifier précisément votre réponse.*

La réponse est $\boxed{\text{non}}$. En effet $P(L_1 = n) \neq 0$, $P(L_2 = 1) \neq 0$ mais $P(L_1 = n, L_2 = 1) = 0$.

5.3. *Déterminer $P(L_2 = 0)$, c'est-à-dire la probabilité qu'il n'y ait pas de deuxième série.*

$$\boxed{P(L_2 = 0) = P(L_1 = n) = p^n + q^n.}$$

5.4. *Soit $k \in L_2(\Omega)$, $k \neq 0$.*

5.4.1. *Démontrer que* $(L_2 = k) = \bigcup_{j=1}^{n-k} \left[\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)\right]$.

A priori puisque $\Big((L_1 = j)\Big)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements on a :

$$(L_2 = k) = \bigcup_{j=1}^{n} \left[\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)\right]$$

Or certain de ces événements $\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)$ sont impossibles. Il s'agit de tous ceux pour lesquels la première série est trop grande pour avoir une deuxième série de longueur k. Donc :

$$\boxed{(L_2 = k) = \bigcup_{j=1}^{n-k} \left[\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)\right].}$$

5.4.2. *En déduire le calcul de $P(L_2 = k)$* Il faudra pour cela distinguer la présence ou non d'une troisième série, c'est à dire distinguer le cas $j + k = n$ et $j + k < n$

$$\begin{aligned}
P(L_2 = k) &= \sum_{j=1}^{n-k} P\left(\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-k-1} p^j q^k p + q^j p^k q + (p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k) \\
&= q^k p \sum_{j=1}^{n-k-1} p^j + p^k q \sum_{j=1}^{n-k-1} q^j + (p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k) \\
&= q^k p^2 \frac{1 - p^{n-k-1}}{1-p} + p^k q^2 \frac{1 - q^{n-k-1}}{1-q} + (p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k) \\
&= \boxed{q^{k-1} p^2 (1 - p^{n-k}) + p^{k-1} q^2 (1 - q^{n-k}) + (p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k)}
\end{aligned}$$

5.5. *Calculer l'espérance de la variable L_2 pour $p = \frac{1}{2}$. La comparer à celle de L_1. Commenter.*

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, $P(L_2 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc

$$\begin{aligned}
E(L_2) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} S_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(n-1)n}{2} \\
&= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \qquad \text{pour information}
\end{aligned}$$

Lorsque $p = \frac{1}{2}$ on a pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $P(L_1 = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$ et cette formule est encore valable pour $j = n$ donc :

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= \sum_{j=1}^{n-1} j \left(\frac{1}{2}\right)^j + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} S_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{pour information}
\end{aligned}$$

On constate donc $\boxed{E(L_2) < E(L_1)}$ donc en moyenne la deuxième série est moins longue (ou plus courte comme on veut) que la première série. Ce résultat s'explique par le fait que pour la deuxième série, il y a moins de lancers possibles que pour la première.

5.6. *Déterminer la limite de $E(L_2)$ quand n tend vers $+\infty$ et que $p = q = \frac{1}{2}$. Commenter.*

$S_{n-1}(\frac{1}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(L_2) = 2}$.

Lorsque on réalise un nombre « infini » de lancers en moyenne la deuxième série aura la même longueur que la première à savoir 2.

[6] *Étude du nombre de séries*

Dans les questions qui suivent on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.

6.1. *Déterminer l'univers image $N(\Omega)$, ensemble des valeurs possibles pour N.*

$$\boxed{N(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

6.2. *Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on nomme X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement « les lancers numéros i et i +1 ont amené des faces différentes » est réalisé, la valeur 0 sinon.*

Exprimer N en fonction des variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$.

$$\boxed{N = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i.}$$

6.3. *En déduire la loi de la variable N.*

Soit $k \in N(\Omega)$,

$$\boxed{P(N = k) = P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k-1\right) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

En effet les X_i sont indépendants donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, \tfrac{1}{2})$.

6.4. *Que vaut l'espérance de N ? Interpréter concrètement ce résultat.* D'après le cours $\displaystyle E(\sum_{i=1}^{n-1} X_i) = (n-1)\frac{1}{2}$.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X_i = N - 1$ donc $E(N-1) = (n-1)\frac{1}{2}$ d'où :

$$E(N) = \frac{n+1}{2}$$

$$\boxed{\text{En moyenne en lançant } n \text{ fois une pièce, le nombre de séries est de } \frac{n+1}{2}.}$$

Exercice 3

On considère une urne contenant n boules ($n \geqslant 2$) numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne des tirages successifs de la manière suivante :

⋆ le premier tirage s'effectue parmi les n boules.

⋆ chacun des tirages suivants s'effectue parmi les $n-1$ boules autres que celle que l'on vient de tirer.

Par exemple, si $n = 3$, le premier tirage s'effectue dans $\{1, 2, 3\}$. Si l'on obtient la boule 2, le deuxième tirage s'effectuera dans $\{1, 3\}$. Si lors de ce deuxième tirage on obtient 1, le troisième tirage s'effectuera dans $\{2, 3\}$ et ainsi de suite.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i le numéro de la boule obtenue au i-ème tirage.

[1] *Donner la loi de X_1, son espérance et calculer sa variance.*

D'après l'énoncé, $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$, et donc (cours) : $\boxed{E(X_1) = \frac{n+1}{2}.}$ On calcule :

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \sum_{k\in X_1(\Omega)} k^2 P(X_1 = k) && \text{transfert} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

On a donc par Huygens :

$$\boxed{V(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n+1}{12}(2n+3-2n-2) \boxed{= \frac{(n+1)(n-1)}{12}}.$$

[2] 2.1. *Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2).*

Les deux premiers tirages correspondent simplement à deux tirages successifs sans remise, on a donc équiprobabilité sur les couples d'éléments **distincts** de $[\![1,n]\!]$, d'où, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\boxed{P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}}$$

2.2. *En déduire la loi de X_2.*

On a clairement $X_2(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{n} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{1}{n(n-1)} = (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

On a donc $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$.

[3] 3.1. *Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, donner la loi conditionnelle de X_{i+1} sachant $[X_i = k]$.*

Si l'on a tiré la boule k au i-ème tirage, le $i+1$-ème tirage se fait parmi les $n-1$ autres boules, et $\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X_{i+1} \text{ sachant } [X_i = k] \text{ est donc uniforme sur } [\![1,n]\!] \setminus \{k\}.}$

3.2. *En déduire par récurrence que les X_i ($i \in \mathbb{N}^*$) suivent toutes la même loi, que l'on précisera.*

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons H_i : «$X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$».

– **Initialisation :** on a bien $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

– **Soit $i \in \mathbb{N}^*$, supposons H_i.**
On a clairement $X_{i+1}(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = k) &= \sum_{l=1}^{n} P(X_i = l) P_{(X_i = l)}(X_{i+1} = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} P_{(X_i = l)}(X_{i+1} = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq k}} \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \times (n-1) \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donc $X_{i+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Par récurrence, on a donc $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$

3.3. *Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Les variables X_i et X_{i+1} sont-elles indépendantes ? et X_i et X_{i+2} ?*

On a $P((X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1)) = 0$ et $P(X_i = 1) P(X_{i+1} = 1) = \frac{1}{n^2}$, donc $\boxed{X_i \text{ et } X_{i+1} \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Si l'on a tiré la boule 1 au tirage i, alors cette boule n'a pas pu être tirée au tirage $i+1$, et fait donc partie des boules utilisées pour le tirage $i+2$. Ainsi, $P_{(X_i = 1)}(X_{i+2} = 1) = \frac{1}{n-1}$, et comme $P(X_{i+2} = 1) = \frac{1}{n}$, $\boxed{X_i \text{ et } X_{i+2} \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

[4] Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

4.1. *Montrer que*

$$E(X_i X_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{kj}{n(n-1)},$$

puis calculer cette somme.

On a

$$\begin{aligned}
E(X_iX_{i+1}) &= \sum_{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2} jkP((X_i=j)\cap(X_{i+1}=k)) = \sum_{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2} jkP(X_i=k)P_{(X_i=k)}(X_{i+1}=j)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} jk\frac{1}{n}P_{(X_i=k)}(X_{i+1}=j) \quad \text{car } X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} jk\frac{1}{n}\frac{1}{n-1} \quad \text{d'après 3.a}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{E(X_iX_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{jk}{n(n-1)}}$

On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{jk}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} j\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) - k\right]\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{n(n+1)}{2} - k\right]\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{n+1}{12(n-1)}\left(3n(n+1) - 2(2n+1)\right) = \frac{n+1}{12(n-1)}(3n^2-n-2)\\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{E(X_iX_{i+1}) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}}$

4.2. *En déduire la valeur de cov(X_i, X_{i+1}).*

On en déduit

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})} &= E(X_iX_{i+1}) - E(X_i)E(X_{i+1}) \qquad \text{Huygens}\\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\
&= \frac{n+1}{12}(3n+2-3(n+1))\\
&\boxed{= -\frac{n+1}{12}}
\end{aligned}$$

Fin de la correction