Devoir Surveillé 8

Le sujet comporte 3 pages. Durée de l'épreuve 3h.
Une attention particulière sera prêtée à la présentation et à la rigueur dans la rédaction.
L'utilisation de tout matériel électronique est interdite.
Merci de commencer chaque exercice sur une nouvelle copie

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On nommera $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

[1] Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

[2] Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

[3] Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Qu'en déduit-on sur $(\mathscr{C})$?

[4] Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera une équation. On précisera également la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).

[5] **5.1.** Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction dérivée de f s'écrit sous la forme $f'(x) = 2xa(x)$ où a est une fonction que l'on précisera et dont on étudiera le signe.

5.2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

[6] Construire $(\mathscr{C})$. On aura soin de commenter et d'annoter le schéma.

[7] La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul donné. On effectue une succession de n lancers indépendants d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans cet exercice aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, et on notera $(L_1 = k)$, si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté. Si tous les lancers ont donné le même coté de la pièce, on dit que la première série est de longueur n et on notera $(L_1 = n)$.

De même, la deuxième série, si elle existe, commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine soit au lancer précédent un changement de côté, soit au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Enfin, on notera N le nombre de séries obtenues.

Exemples : si $n = 5$
- Si on a obtenu, dans cet ordre, $PPPFP$, on dira que $L_1 = 3$, $L_2 = 1$, $N = 3$
- Si on a obtenu, dans cet ordre, $PPFFF$, on dira que $L_1 = 2$, $L_2 = 3$, $N = 2$
- Si on a obtenu, dans cet ordre, $PPPPP$, on dira que $L_1 = 5$, $L_2 = 0$, $N = 1$

Pour i dans $[\![1, n]\!]$, on note P_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Pile » et F_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Face ».

[1] *Question préliminaire*

Le but de cette question est de calculer la somme $S_r(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} kx^{k-1}$ où r désigne un entier au moins égal à 1 et x un réel différent de 1. Pour cela on définit la fonction $T_r(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} x^k$.

1.1. Quelle relation simple y a-t-il entre S_r et T_r ?

1.2. Trouver une expression de $T_r(x)$ ne faisant plus apparaitre le symbole Σ.

1.3. En déduire que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ S_r(x) = \dfrac{rx^{r+1} - (r+1)x^r + 1}{(1-x)^2}$

[2] *Première simulation informatique*
Rédiger une fonction pour Python, que l'on nommera `f1`, qui reçoit un entier naturel n non nul et un réel p compris entre 0 et 1 et renvoie une simulation de n lancers sous la forme d'une liste de `'P'` et de `'F'`. Par exemple :

```
>>> f1(5,0.5)
['P', 'F', 'P', 'P', 'F']
```

[3] *Deuxième simulation informatique*
On a défini une fonction `f2` comme suit :

```python
def f2(liste):
    n = len(liste)
    i = 0
    while liste[i] == liste[i+1] and i < n-2:
        i = i + 1
    if i < n-2:
        return i+1
    elif liste[n-2] == liste[n-1]:
        return n
    else:
        return n-1
```

Que renverra Python si on appelle la fonction `f2` dans les cas suivants :

3.1. `f2(['F', 'F', 'F', 'P', 'F'])`

3.2. `f2(['F', 'F', 'F', 'F', 'P'])`

3.3. `f2(['P', 'P', 'P', 'P', 'P'])`

3.4. Que renvoie la fonction `f2` ?

[4] *Étude de la longueur de la première série*
On rappelle que l'on note L_1 la longueur de la première série.

4.1. Déterminer l'ensemble $L_1(\Omega)$ des valeurs possibles pour L_1.

4.2. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$

4.2.1. Exprimer l'événement $(L_1 = j)$ à l'aide d'événements du type P_i ou F_i définis dans le préambule.

4.2.2. En déduire le calcul de $P(L_1 = j)$.

4.3. Déterminer de même $P(L1 = n)$.

4.4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{j \in L_1(\Omega)} P(L_1 = j) = 1$.

4.5. Montrer que $E(L_1) = \dfrac{q}{p}(1-q^n) + \dfrac{p}{q}(1-p^n)$. On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire.

4.6. Déterminer la limite de $E(L_1)$ quand n tend vers $+\infty$ et que $p = q = \frac{1}{2}$.

[5] *Étude de la longueur de la deuxième série*
On rappelle que l'on note L_2 la longueur de la deuxième série.

5.1. Déterminer l'ensemble $L_2(\Omega)$ des valeurs possibles pour L_2.

5.2. Les variables L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? Justifier précisément votre réponse.

5.3. Déterminer $P(L_2 = 0)$, c'est-à-dire la probabilité qu'il n'y ait pas de deuxième série.

5.4. Soit $k \in L_2(\Omega),\ k \neq 0$.

5.4.1. Démontrer que $(L_2 = k) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n-k} \Big[\Big((L_1 = j)\Big) \cap \Big((L_2 = k)\Big)\Big]$.

5.4.2. En déduire le calcul de $P(L_2 = k)$

5.5. Calculer l'espérance de la variable L_2 pour $p = \frac{1}{2}$. La comparer à celle de L_1. Commenter.

5.6. Déterminer la limite de $E(L_2)$ quand n tend vers $+\infty$ et que $p = q = \frac{1}{2}$. Commenter.

[6] *Étude du nombre de séries*

Dans les questions qui suivent on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.

6.1. Déterminer l'univers image $N(\Omega)$, ensemble des valeurs possibles pour N.

6.2. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on nomme X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement « les lancers numéros i et i +1 ont amené des faces différentes » est réalisé, la valeur 0 sinon.

Exprimer N en fonction des variables $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$.

6.3. En déduire la loi de la variable N.

6.4. Que vaut l'espérance de N ? Interpréter concrètement ce résultat.

Exercice 3

On considère une urne contenant n boules ($n \geqslant 2$) numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne des tirages successifs de la manière suivante :

⋆ le premier tirage s'effectue parmi les n boules.

⋆ chacun des tirages suivants s'effectue parmi les $n-1$ boules autres que celle que l'on vient de tirer.

Par exemple, si $n = 3$, le premier tirage s'effectue dans $\{1, 2, 3\}$. Si l'on obtient la boule 2, le deuxième tirage s'effectuera dans $\{1, 3\}$. Si lors de ce deuxième tirage on obtient 1, le troisième tirage s'effectuera dans $\{2, 3\}$ et ainsi de suite.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i le numéro de la boule obtenue au i-ème tirage.

[1] Donner la loi de X_1, son espérance et calculer sa variance.

[2] **2.1.** Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

2.2. En déduire la loi de X_2.

[3] **3.1.** Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, donner la loi conditionnelle de X_{i+1} sachant $[X_i = k]$.

3.2. En déduire par récurrence que les X_i ($i \in \mathbb{N}^*$) suivent toutes la même loi, que l'on précisera.

3.3. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Les variables X_i et X_{i+1} sont-elles indépendantes ? et X_i et X_{i+2} ?

[4] Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

4.1. Montrer que

$$E(X_i X_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{kj}{n(n-1)},$$

puis calculer cette somme.

4.2. En déduire la valeur de $\operatorname{cov}(X_i, X_{i+1})$.

Fin de l'épreuve