DM 7 – Correction

Exercice 39

Pour commencer, on traduit les données de l'énoncé :

- $P(I) = \frac{1}{10}$
- $P_I(V) = \frac{3}{4}$
- $P_{\overline{I}}(C) = P_{I\cap\overline{V}}(C) = \frac{1}{40}$
- $P_{I\cap V}(C) = \frac{1}{60}$

1. On a $P_I(C) = \frac{P(C\cap I)}{P(I)}$. Or $C \cap I = (C \cap I \cap V) \cup (C \cap I \cap \overline{V})$, et cette union est disjointe. On a donc
$P(C \cap I) = P(C \cap I \cap V) + P(C \cap I \cap \overline{V}) = P(I \cap V)P_{I\cap V}(C) + P(I \cap \overline{V})P_{I\cap\overline{V}}(C) = \frac{1}{60}P(I \cap V) + \frac{1}{40}P(I \cap \overline{V})$.
Or $P(I \cap V) = P(I)P_I(V) = \frac{3}{40}$ et $P(I \cap \overline{V}) = P(I)P_I(\overline{V}) = \frac{1}{40}$, d'où

$$\boxed{P_I(C)} = \frac{\frac{1}{60}\times\frac{3}{40}+\frac{1}{40}\times\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{80}+\frac{1}{160} = \boxed{\frac{3}{160}}$$

2. On applique les probabilités totales avec le sce $(I, \overline{I})$:
$P(C) = P(C \cap I) + P(C \cap \overline{I}) = \underbrace{\frac{1}{60}\times\frac{3}{40}+\frac{1}{40}\times\frac{1}{40}}_{\text{d'après la question précédente}} + P(\overline{I})P_{\overline{I}}(C) = \frac{3}{1600} + \frac{9}{10}\times\frac{1}{40} = \frac{39}{1600}$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un véhicule en stationnement soit contrôlé est donc de } \frac{38}{1600}.}$

3. On cherche $P_{C\cap I}(V) = \frac{P(C\cap I\cap V)}{P(C\cap I)}$. On a déjà calculé numérateur et dénominateur au 1, on obtient :

$$\boxed{P_{C\cap I}(V)} = \frac{\frac{1}{60}\times\frac{3}{40}}{\frac{1}{60}\times\frac{3}{40}+\frac{1}{40}\times\frac{1}{40}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si Nicolas fraude le jour n, il est verbalisé avec probabilité $\frac{1}{60}$ (puisqu'il est contrevenant volontaire). S'il ne fraude pas le jour n, il n'est bien sûr par verbalisé. D'après l'énoncé, Nicolas fraude le jour $n+1$ ssi il n'a pas été verbalisé le jour n. On a donc $P_{N_n}(N_{n+1}) = \frac{59}{60}$ et $P_{\overline{N_n}}(N_{n+1}) = 1$. D'après les probabilités totales avec le sce $(N_n, \overline{N_n})$, on en déduit

$$P(N_{n+1}) = P(N_n)P_{N_n}(N_{n+1}) + P(\overline{N_n})P_{\overline{N_n}}(N_{n+1}) = P(N_n)\times\frac{59}{60} + (1-P(N_n))\times 1,$$

d'où $\boxed{P(N_{n+1}) = 1 - \frac{1}{60}P(N_n)}$. On reconnaît une suite arithmético-géométrique, on résout l'équation (1) : $l = 1 - \frac{l}{60}$ qui a pour unique solution $l = \frac{60}{61}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(N_n) - l$. On a alors $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{60}(u_n + l) - l = 1 - \frac{1}{60}(u_n + l) - \underbrace{1 + \frac{l}{60}}_{\text{d'après (1)}} = -\frac{1}{60}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{60}$, on en déduit

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(N_n) =} u_n + \frac{60}{61} = \left(\frac{-1}{60}\right)^n\left(N_0 - \frac{60}{61}\right) + \frac{60}{61} = \boxed{\left(\frac{-1}{60}\right)^n\frac{1}{61} + \frac{60}{61}}$.

On a $-1 < \frac{-1}{60} < 1$, donc $\left(\frac{-1}{60}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\boxed{P(N_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{60}{61}}$.