CHAPITRE 8

DÉRIVATION

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, D, E, F désigneront des parties de $\mathbb{R}$ et I, J des intervalles de $\mathbb{R}$. On supposera donné, quand nécessaire, un repère du plan et l'on notera C_f la courbe d'une fonction f dans ce repère.

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Dérivabilité

1.1.a Nombre dérivé en un point

Définition 8.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a, b deux éléments distincts de I.

- On appelle *corde* de f entre a et b la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ de C_f.
- On appelle *taux d'accroissement* de f entre a et b le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, égal au coefficient directeur de la corde de C_f entre a et b.

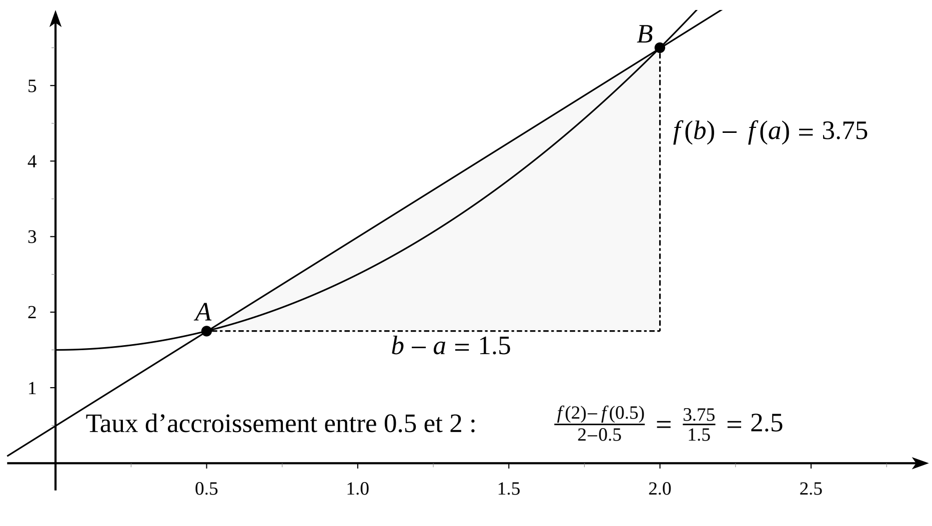


Figure 8.1 – Corde et taux d'accroissement.

Définition 8.2
Nombre dérivée en un point

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.

- f est dite dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, autrement dit si son taux d'accroissement entre a et x admet une **limite finie** quand x tend vers a.
- Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et l'on note

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarques

- Une fonction peut donc être définie en a sans être dérivable en a pour deux raisons : soit parce que le taux d'accroissement n'a pas de limite, soit parce qu'il a une limite infinie.
- En effectuant le changement de variable $x = a + h$, le taux d'accroissement entre a et x s'écrit $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et l'on peut donc remplacer l'étude de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand $x \to a$ par celle de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h \to 0$.

Définition 8.3

Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
f est dite *dérivable* si elle est dérivable en a pour tout $a \in D$.
Dans ce cas, on appelle *fonction dérivée* de f, et l'on note f', la fonction $f' : D \to \mathbb{R} \mid x \mapsto f'(x)$.

Théorème 8.4

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 8.1.

EXEMPLE 8.1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \sqrt{x}$, et soit $a \in \mathbb{R}_+$.

Si $a > 0$ *on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$,*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Or $\sqrt{x} + \sqrt{a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 2\sqrt{a} \neq 0$ car $a \neq 0$, et donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}} \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable en tout $a \neq 0$ et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ pour $a \neq 0$.

Si $a = 0$ *on étudie de même, pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Mais la limite de ce quotient quand x tend vers 0 est $+\infty$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est donc pas dérivable en 0.*

Finalement, la fonction racine, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et donc en particulier en 0), est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ mais **pas en 0**.

EXERCICE 8.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^2$. Montrer que f est dérivable et déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ (à partir de la définition, bien sûr).

Définition 8.5
Dérivée à gauche, à droite

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.

- Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on dit que f est *dérivable à droite* en a, et l'on note $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on dit que f est *dérivable à gauche* en a, et l'on note $f'_g(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposition 8.6

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
f est dérivable en a ssi elle admet des dérivées à gauche et à droite en a et que ces dérivées sont égales.

Remarque

On peut définir la dérivabilité à gauche et à droite en a de manière plus concise : f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a ssi $f_{|D\cap]-\infty,a]}$ (resp. $f_{|D\cap[a,+\infty[}$) est dérivable en a.

Exercice 8.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto |x|$. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 8.7

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Si f est dérivable en a et si $\boldsymbol{f'(a) \neq 0}$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Remarques

- En admettant les résultats sur les dérivées des fonctions usuelles, cette propriété permet de retrouver les équivalents usuels.
- On peut effectuer le changement de variable $x = a + h$, on obtient alors $f(x+h) - f(x) \underset{h\to 0}{\sim} hf'(x)$.
- Attention à l'hypothèse $f'(a) \neq 0$. Sinon, on obtient par exemple $\cos x - \cos 0 \underset{x\to 0}{\sim} \cos'(0)(x-0)$, c'est-à-dire $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 0$, ce qui est clairement faux.

Exemple 8.4

- *La fonction* $\sin$ *est dérivable en 0 et* $\sin'(0) = \cos 0 = 1$. *On en déduit* $\sin x - \sin 0 \underset{x\to 0}{\sim} 1 \times (x-0)$, *c'est-à-dire* $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- *La fonction* $\ln$ *est dérivable en 1 et* $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. *On en déduit* $\ln x - \ln 1 \underset{x\to 1}{\sim} 1 \times (x-1)$, *c'est-à-dire* $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$. *En effectuant le changement de variable $x = 1 + h$, cet équivalent devient* $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$.

Proposition 8.8

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
f est dérivable en a ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + o_{x\to a}(x-a)$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = c$.

Remarques

- On dit que f admet un *développement limité à l'ordre 1 en a*. Cette notion sera largement approfondie au chapitre suivant.
- Une nouvelle fois, on peut effectuer le changement de variable $x = a + h$ pour obtenir, si f est dérivable en a, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o_{h\to 0}(h)$.

1.1.b Tangente

Définition 8.9

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ et $A(a, f(a))$.

- Si f est dérivable en a, on appelle *tangente en A à C_f* la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
- Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \pm\infty$, on appelle tangente en A à C_f la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par A.
- Dans les autres cas, C_f n'admet pas de tangente en A.

Remarques

- On parle aussi de tangente à C_f au point d'abscisse a ou même simplement de tangente en a.
- Dans le deuxième cas, les limites à gauche et à droite peuvent être différentes, tant qu'elles sont toutes les deux infinies.
- Parmi toutes les droites passant par A, la tangente est celle qui «colle le mieux» à C_f autour de A (si une telle droite existe).
- Géométriquement, la tangente Δ correspond à la position limite, si elle existe, de la corde reliant $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ quand x tend vers a.

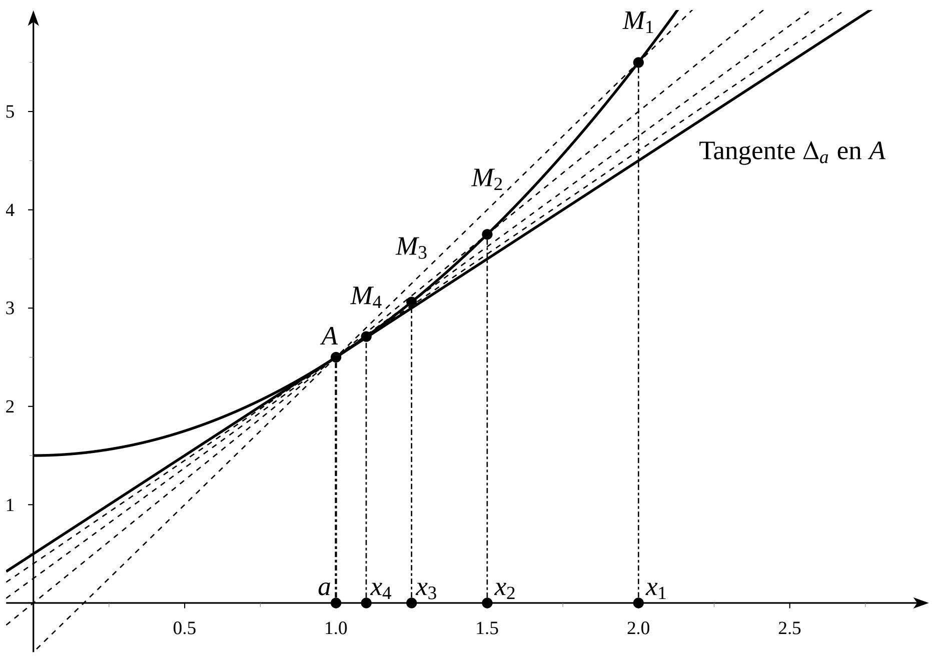


FIGURE 8.2 – Position limite des cordes.

Proposition 8.10

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
f est dérivable en a ssi elle admet une tangente non verticale T_a au point d'abscisse a et, dans ce cas, on a :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

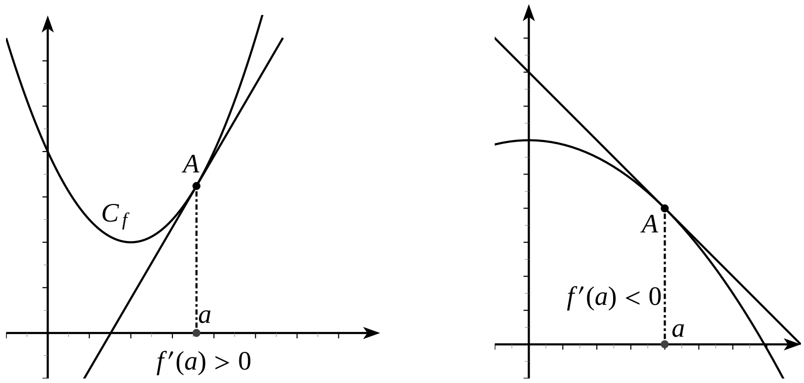


Figure 8.3 – Tangentes obliques

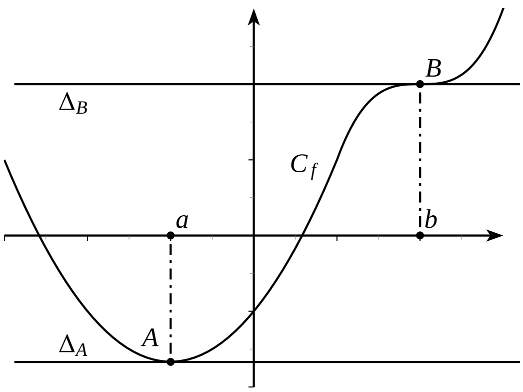


Figure 8.4 – Tangentes horizontales, $f'(a) = f'(b) = 0$

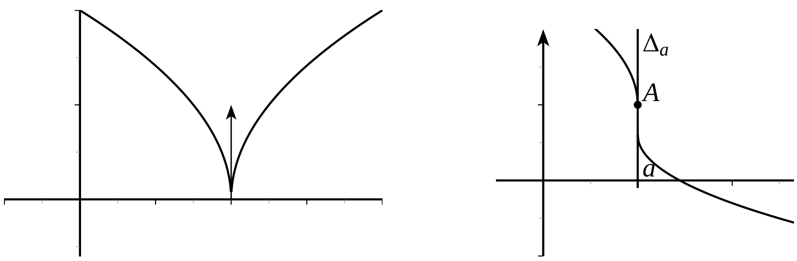
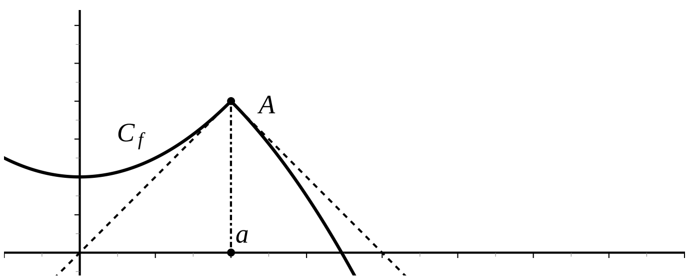


Figure 8.5 – Tangentes verticales, f n'est pas dérivable en a.



Les dérivées à gauche et à droite en a existent et sont différentes. La fonction n'est pas dérivable en a et il n'y a pas de tangente en A.

Figure 8.6 – Point anguleux.

Définition 8.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

- f est dite *convexe* si, pour tout $a \in I$, C_f est au-dessus de sa tangente en a, *i.e.* si :

$$\forall a \in I\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

- f est dite *concave* si, pour tout $a \in I$, C_f est en-dessous de sa tangente en a, *i.e.* si :

$$\forall a \in I\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

Proposition 8.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

- f est convexe ssi f' est croissante.
- f est concave ssi f' est décroissante.
- f est concave ssi $-f$ est convexe.

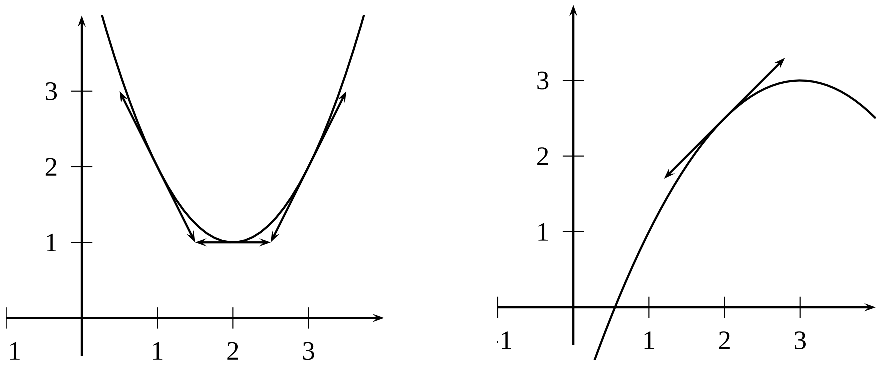


FIGURE 8.7 – Fonction convexe (à gauche), fonction concave (à droite).

EXERCICE 8.5

Montrer que ln *est concave, et en déduire que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leqslant x - 1$.

1.1.c Fonctions à valeurs vectorielles

Définition 8.13
Dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f : D \to \mathbb{R}^n \mid x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. La fonction f est dite dérivable en a ssi toutes les fonctions $f_1, \dots, f_n$ le sont.
Dans ce cas, on pose $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$.

EXERCICE 8.6

On considère un point du plan repéré par ses coordonnées cartésiennes.

L'équation horaire de son mouvement est donnée pour $t \geqslant 0$ *par* $\begin{cases} x(t) = \cos(\theta_0)v_0 t \\ y(t) = \sin(\theta_0)v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

où θ_0, v_0 *et* g *sont trois constantes réelles.*
Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point.

Définition 8.14
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Soient $f : D \to \mathbb{C}$ et $a \in D$.
La fonction f est dite dérivable en a si les deux fonctions
$f_1 : D \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \Re(f(x))$ et $f_2 : D \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \Im(f(x))$ le sont.
Dans ce cas, on pose $f'(a) = f_1'(a) + if_2'(a)$.

Proposition 8.15

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid x \mapsto e^{z_0 x}$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = z_0 e^{z_0 x}$.

EXEMPLE 8.7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \theta \mapsto e^{i\theta}$. *f est dérivable et* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = ie^{ix} = e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 8.16

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $I \subset D$ (on rappelle que I désigne un intervalle).
f est dite *dérivable sur I* si $f_{|D\cap I}$ est dérivable.

Proposition 8.17

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et I un intervalle de bornes a et b, $a < b$ tel que $I \subset D$.

- Si $I =]a,b[$, f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout x de I.
- Si $I =]a,b]$, f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout x de $]a,b[$ et dérivable à gauche en b.
- Si $I = [a,b[$, f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout x de $]a,b[$ et dérivable à droite en a.
- Si $I = [a,b]$, f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout x de $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Remarques

- On retiendra surtout qu'il faut se méfier des bornes fermées des intervalles.
- On peut toujours revenir à la définition par le taux d'accroissement au lieu de considérer les dérivées à gauche ou à droite (et c'est parfois plus simple à comprendre).

⇝ EXERCICE 8.8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$
Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ *?*
On admet ici les résultats sur la dérivabilité des fonctions usuelles.

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

f	f'	**Remarques**
$x \mapsto c,\ c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	pour $x \neq 0$ si $n < 0$
exp	exp	
ln	$x \mapsto \frac{1}{x}$	pour $x > 0$
sin	cos	
cos	$-\sin$	
tan	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$	pour $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**non dérivable en 0**
$x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$	**non dérivable en 0**
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax^{a-1}$	pour $x > 0$

1.4 Calcul de dérivée

Proposition 8.18

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset E$, $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $a \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont dérivables en a, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$
- Si f et g sont dérivables en a, alors $f \times g$ est dérivable en a et
$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
- Si f est dérivable en a et φ dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est dérivable en a et
$$(\varphi \circ f)'(a) = f'(a) \times \varphi'(f(a))$$

Remarque

Le premier point traduit le fait que la dérivée est *linéaire*.

Proposition 8.19

- Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$
- Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors fg est dérivables et
$$(fg)' = f'g + fg'$$
- Si $f : D \to E$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors $\varphi \circ f$ est dérivable et
$$(\varphi \circ f)' = f' \times (\varphi' \circ f)$$

En prenant pour φ la fonction inverse, on obtient la formule permettant de dériver $\frac{1}{f}$:

Proposition 8.20

Si f est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

En combinant cette formule avec celle donnant la dérivée d'un produit, on obtient la dérivée d'un quotient :

Proposition 8.21

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur $I \subset D$ et que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

⇝ EXEMPLE 8.9

On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$ *et l'on souhaite étudier sa dérivabilité.*

- $x \mapsto 1 - x^2$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $X \mapsto \sqrt{X}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc (composée)* $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$.
- $x \mapsto x - 1$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et donc sur* $]-1, 1[$ *et* $x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$ *est donc dérivable sur* $]-1, 1[$ *(produit).*

Pour $x \in]-1, 1[$, *on a* $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + (x-1)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les théorèmes généraux ne disent **rien** *sur la dérivabilité de* f *en* -1 *et en* 1 *: il faut revenir à l'étude du taux d'accroissement*[a]. *On trouve alors que* f *n'est pas dérivable en* -1 *(le taux d'accroissement a une limite infinie) mais qu'elle est dérivable en 1 (et que* $f'(1) = 0$*).*

a. ou utiliser le théorème 8.35 sur la limite de la dérivée

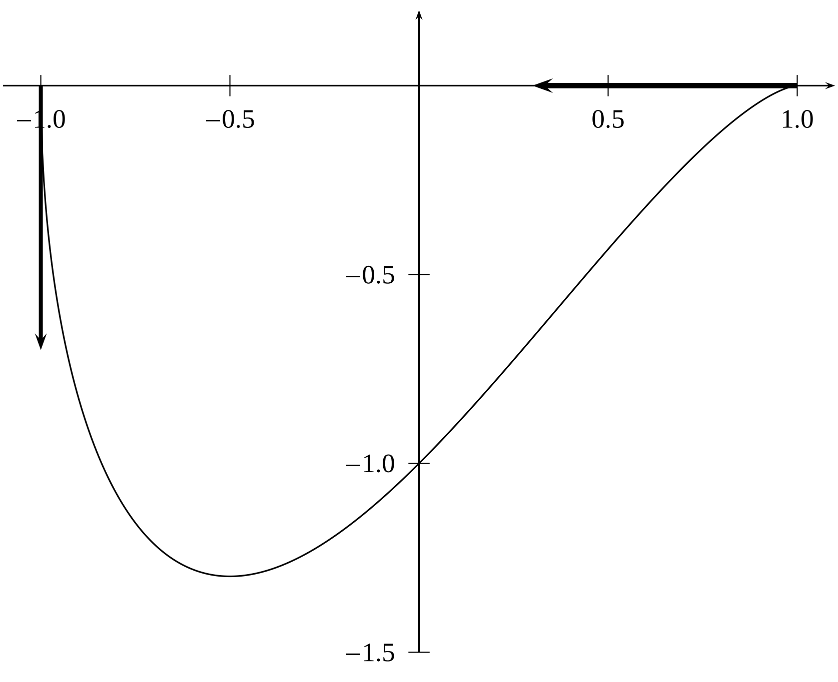


FIGURE 8.8 – Courbe $y = (x-1)\sqrt{1-x^2}$

⇝ EXERCICE 8.10

> *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et étudier leur dérivabilité.*
> On demande ici des justifications précises.
> **1.** $f_1 : x \mapsto e^{\sin x}$
> **2.** $f_2 : x \mapsto \left|x^3\right|$
> **3.** $f_3 : x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$

On peut souvent alléger la rédaction en utilisant la propriété suivante :

Proposition 8.22

Toute fonction obtenue comme somme, produit et composée de fonctions dérivables est dérivable.

Remarques

- **Attention**, on ne peut plus utiliser cette propriété dès qu'il y a des racines ou des valeurs absolues dans l'expression de f. En effet, les fonctions racine carrée et valeur absolue ne sont **pas dérivables** (puisqu'elles sont définies en 0 sans y être dérivables).
- D'un point de vue plus «comptable», si l'on vous pose une question du type *«justifier que la fonction f est dérivable»*, on attend en règle générale une réponse détaillée.

2 Dérivées successives

2.1 Dérivée d'ordre n d'une fonction

Définition 8.23
Dérivées successives d'une fonction

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence les dérivées successives de f par :
- $f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Remarque

On a donc, si ces dérivées existent, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = (f')'$ (que l'on note usuellement f'').

Définition 8.24
Fonctions $\mathcal{D}^n$, fonctions C^n

Soient $D \subset \mathbb{R}$. On définit
- $\mathcal{D}^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R}\}$.
- $C^0(D) = C(D) = \{f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue}\}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^{n+1}(D) = \{f \in \mathcal{D}^n(D),\ f^{(n)} \text{ est dérivable sur } D\}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $C^n(D) = \{f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}),\ f^{(n)} \in C(D)\}$
- $C^\infty(D) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n(D)$

Remarques

- $C^0(D)$, usuellement noté $C(D)$, est l'ensemble des fonctions continues sur D.
- $\mathcal{D}^1(D)$, usuellement noté $\mathcal{D}(D)$, est l'ensemble des fonctions dérivables sur D.
- Une fonction appartenant à $\mathcal{D}^n(D)$ est dite *de classe $\mathcal{D}^n$* sur D (ou *n fois dérivable* sur D).
- Une fonction appartenant à $C^n(D)$ (respectivement à C^∞) est dite *de classe C^n* (resp. *de classe C^∞*) sur D.
- Une fonction est de classe C^n ssi elle est n fois dérivable et que sa dérivée n-ième est continue.
- Une fonction est de classe C^∞ ssi sa dérivée n-ième existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 8.25

On a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}^0(D) \supset C^0(D) \supset \mathcal{D}^1(D) \supset C^1(D) \supset \cdots \supset \mathcal{D}^n(D) \supset C^n(D) \supset \cdots \supset C^\infty(D)$$

⇝ EXERCICE 8.11

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{1}{x}$. Montrer que f est C^∞ et déterminer l'expression de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 8.26

- Les fonctions polynômes, la fonction inverse, les fonctions exp, ln, sin, cos et tan sont C^∞ sur leur domaine de définition respectif.
- La fonction racine carrée est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 8.27

Soient $D, E \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Si $f \in \mathcal{D}^n(D)$, alors $\lambda f \in \mathcal{D}^n(D)$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.
- Si $f, g \in \mathcal{D}^n(D)$, alors $f + g \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
- Si $f, g \in \mathcal{D}^n(D)$, alors $fg \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \textbf{Formule de Leibniz}$$

- Si $f \in \mathcal{D}^n(D)$ et que $\varphi \in \mathcal{D}^n(E)$ avec $f(D) \subset E$, alors $\varphi \circ f \in \mathcal{D}^n(D)$.

On a les mêmes propriétés en remplaçant $\mathcal{D}^n(D)$ par $C^n(D)$ ou par $C^\infty(D)$.

⇝ EXERCICE 8.12

1. *Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \sin\left(x^2 + e^x\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^2 e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $g^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

3 Théorèmes fondamentaux

3.1 Dérivée et sens de variation

Théorème 8.28

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable (I est un **intervalle**).
- f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I.
- f est décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I.
- f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I.
- Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques

- Attention à n'utiliser cette propriété que sur un intervalle. Si l'on prend $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{1}{x}$, on a f dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$, et pourtant f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En revanche f est bien décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- Les deux derniers points ne sont pas des équivalences. On a en fait la condition nécessaire et suffisante suivante (hors-programme) : f est strictement croissante ssi $f' \geqslant 0$ et f' n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point.

Définition 8.29

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que

- f admet un *maximum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in D \cap V\ f(x) \leqslant f(a)$$

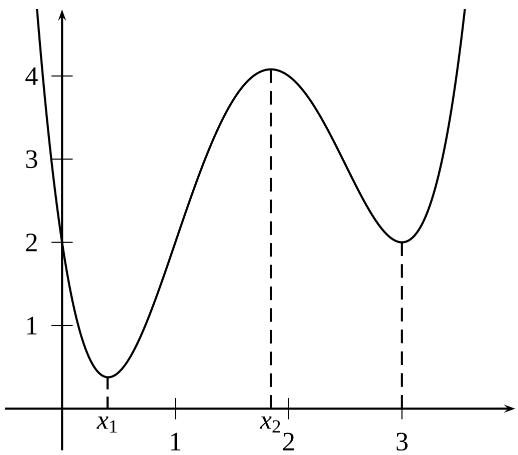
- f admet un *minimum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in D \cap V\ f(x) \geqslant f(a)$$

- f admet un *extremum local* en a si elle y admet un minimum local ou un maximum local.

Remarques

- Autrement dit, f admet un maximum local en a si l'on a $f(x) \leqslant f(a)$ pour x suffisamment proche de a.
- Un maximum global est forcément un maximum local, mais la réciproque est fausse.



La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ représentée ci-contre admet trois extrema locaux :

- deux minima locaux en $x_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ et en $x_2 = 3$;
- un maximum local en $x_3 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

Le minimum local en x_1 est également un minimum global ; f n'admet pas de maximum global.

FIGURE 8.9 – Extrema d'une fonction

Proposition 8.30

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in]a, b[$.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.

Remarques

- Le changement de signe de f' est obligatoire. La fonction $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$, a une dérivée nulle en 0 et elle n'y a pourtant pas d'extremum local (elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$...).
- Attention également à n'appliquer ce théorème que sur un intervalle ouvert.
  La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid x \mapsto 2x + 3$ a un minimum global (et donc local) en 0, et pourtant $f'(0) = 2$.

⇝ EXERCICE 8.13

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto (1-k)x^2 + (1+k)x^3$.

1. *Déterminer les valeurs de k pour lesquelles f admet un extremum local en 0.*

2. *f peut-elle avoir un extremum global en 0 ?*

3.2 Accroissements finis

Théorème 8.31
Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si
- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

alors
$$\exists c \in]a,b[, \; f'(c) = 0.$$

Remarques
- Il faut toujours citer précisément les hypothèses de ce théorème quand on l'utilise.
- c n'a bien sûr aucune raison d'être unique.

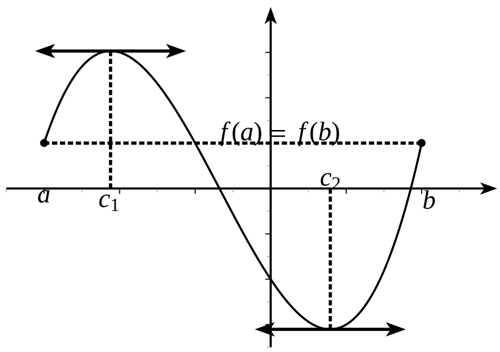


FIGURE 8.10 – Illustration du théorème de Rolle.

⇝ EXERCICE 8.14

Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ qui a n racines réelles simples. Montrer que toutes les racines de P' sont simples.

Théorème 8.32
Égalité des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si
- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

alors
$$\exists c \in]a,b[, \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Remarque

Géométriquement, l'égalité des accroissements finis affirme qu'il existe (au moins) une tangente à C_f en un point de $]a, b[$ qui soit parallèle à la corde entre a et b.

EXERCICE 8.15

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \underset{+\infty}{\to} 0$.

Montrer que $\frac{f(x)-f(\sqrt{x})}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a deux corollaires immédiats mais extrêmement utiles de ce théorème :

Théorème 8.33
Inégalité des accroissements finis

Soient $a, b, m, M \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a; b[$.
- Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geqslant m$, alors $f(b) - f(a) \geqslant m(b - a)$.
- Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leqslant M$, alors $f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

Remarque

Intuitivement, ce n'est pas franchement surprenant : si vous avez roulé de 14 heures (a) à 16 h 30 (b) et que votre compteur ($f'(x)$) n'a jamais dépassé les 100 km/h (M), alors vous avez parcouru au plus 100(16-14,5)=250 kilomètres ($f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$).

Théorème 8.34
Inégalité des accroissements finis, bis

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $M \in \mathbb{R}$.
Si $|f'| \leqslant M$, alors
$$\forall x, y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

⇝ EXERCICE 8.16

Montrer que $\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x + 1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

⇝ EXERCICE 8.17

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid x \mapsto \sqrt{2 + x}$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ |f(x) - 2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 2|$.*
2. *En déduire que la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite que l'on déterminera.*

3.3 Prolongements

Théorème 8.35
Limite de la dérivée

Soient I un intervalle non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$.
- Si $f'(x) \underset{x\to a^{\neq}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
- Si $f'(x) \underset{x\to a^{\neq}}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et C_f a une tangente verticale en a.

Remarques

- L'intérêt de ce théorème est d'éviter l'étude du taux d'accroissement (*cf* exemple 8.18).
- En particulier, si f est continue sur I, de classe C^1 sur $I \setminus a$ et que $f'(x) \underset{x \to a^{\neq}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors f est de classe C^1 sur I.
- Attention, f peut être dérivable sans que sa dérivée soit continue (*i.e.* $\mathcal{D}^1$ mais pas C^1) et $f'(a)$ peut donc exister alors que $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to a$, $x \neq a$ (*cf* exercice 8.19).

EXEMPLE 8.18

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|x \mapsto x\sqrt{x - x^2}$.
$x \mapsto x$ *et* $x \mapsto x - x^2$ *sont dérivables sur* $[0,1]$ *(fonctions polynômes),* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$, *donc* f *est dérivable en tout point* x *de* $[0,1]$ *tel que* $x - x^2 > 0$, i.e. *en tout* x *de* $]0,1[$, *et on a alors*

$$f'(x) = \sqrt{x - x^2} + x\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{2x - 2x^2 + x - 2x^2}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x(3-4x)}{\underbrace{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}_{\text{car } x>0 \text{ et } 1-x>0}} = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}.$$

En 0 *On a* $\sqrt{x}(3-4x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ *et* $2\sqrt{1-x} \underset{x \to 0}{\to} 2$, *donc* $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. *Par conséquent,* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$. *De plus,* f *est* C^1 *sur* $[0;1[$.
En 1 *On a* $\sqrt{x}(3-4x) \underset{x\to 1}{\to} -1 < 0$ *et* $2\sqrt{1-x} \underset{x\to 1}{\to} 0^+$, *donc* $f'(x) \underset{x\to 1}{\to} -\infty$. f *n'est donc pas dérivable en* 1, *elle admet un tangente verticale au point d'abscisse 1.*

⇝ EXERCICE 8.19

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f *est dérivable mais que* f' *n'est pas continue en 0 (donc en particulier que* $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ *mais* $f \notin C^1(\mathbb{R})$*).*

3.4 Dérivée de la réciproque

3.4.a Dérivabilité de f^{-1}

Théorème 8.36

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

- f réalise une bijection de I dans $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue, de même monotonie que f.
- Pour $y_0 \in f(I)$, si f est dérivable en $f^{-1}(y_0)$ et que $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Remarques

- Le premier point est une reformulation du théorème de la bijection monotone.
- Dans le deuxième point, la condition donnée est suffisante, mais pas nécessaire. Si C_f admet une tangente verticale en $f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 0$. On se référera à la figure 8.11.
- La forme de $(f^-1)'(y)$ peut facilement être retrouvée en écrivant que $\forall y \in f(I),\ f(f^{-1}(y)) = y$ et en dérivant. Ce n'est par contre pas une preuve du théorème puisqu'on ne démontre pas que f^{-1} est dérivable.

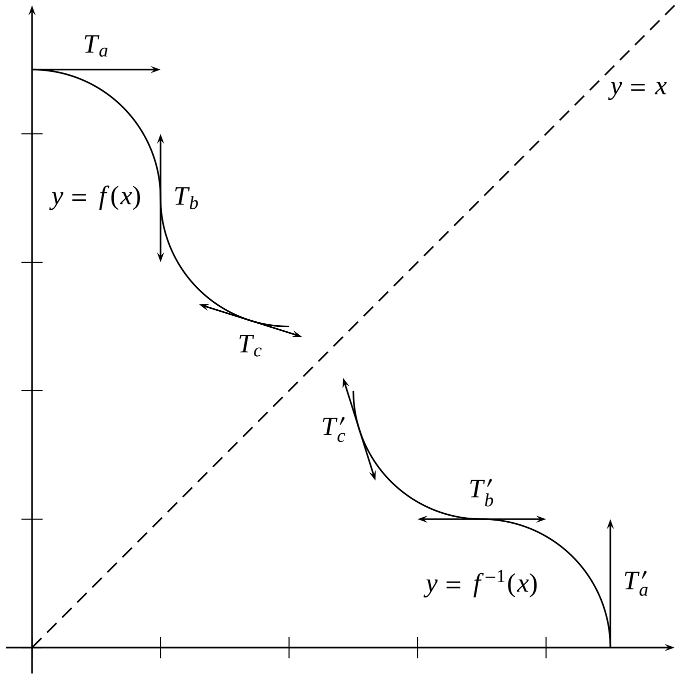


FIGURE 8.11 – Dérivée de la réciproque

On rappelle que les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$; il en est donc de même de leurs tangentes. Sur le graphique, on observe ainsi que la tangente T'_a au point d'abscisse $\frac{9}{2}$ de $C_{f^{-1}}$ est symétrique de celle T_a au point d'abscisse 0 de C_f (car $f(0) = \frac{9}{2}$). De même, T_b, tangente verticale à C_f, correspond à une tangente horizontale T'_b à $C_{f^{-1}}$, et T_c à T'_c.

Théorème 8.37

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f réalise une bijection strictement croissante (resp. décroissante) de I vers $f(I)$ et sa dérivée réciproque est dérivable, de dérivée :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque

Si on suppose de plus que f est de classe C^n (respectivement de classe C^∞), alors f^{-1} est de classe C^n (resp. de classe C^∞).

3.4.b Application aux fonctions trigonométriques réciproques

Définition 8.38

La fonction sin :
- est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- vérifie $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
Sa bijection réciproque, notée arcsin, est continue et strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque

Si $x \in [-1, 1]$, il y a une infinité de réels dont le sinus vaut x. Parmi tout ces réels, un seul appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: c'est $\arcsin(x)$, par définition.

Proposition 8.39

- $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin(x)) = x$.
- $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$.
- arcsin est impaire.
- $\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Remarque

Si l'on veut calculer $\arcsin(\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, il faut d'abord se ramener dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 8.20

1. *Calculer* $\arcsin(-1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. *Calculer* $\arcsin(\sin(-5\pi))$ *et* $\arcsin\left(\sin\left(\frac{23\pi}{5}\right)\right)$.

Théorème 8.40

- arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1, sa courbe y admet des tangentes verticales.

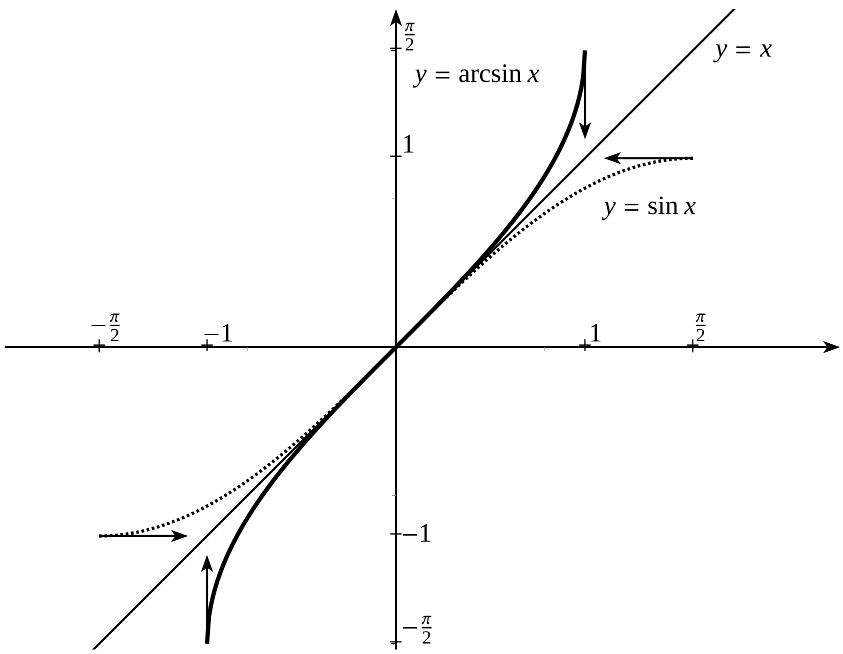


Figure 8.12 – Courbe de arcsin

Définition 8.41

La fonction cos :
- est continue sur $[0, \pi]$;
- est strictement décroissante sur $[0, \pi]$;
- vérifie $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
Sa bijection réciproque, notée arccos, est continue et strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

Remarque

Si $x \in [-1, 1]$, il y a une infinité de réels dont le cosinus vaut x. Parmi tous ces réels, un seul appartient à $[0, \pi]$: c'est par définition $\arccos x$.

Proposition 8.42

- $\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arccos(x)) = x$.
- $\forall \theta \in [0, \pi],\ \arccos(\cos \theta) = \theta$.
- $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 8.21

1. *Calculer* $\arccos(-1)$, $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. *Calculer* $\arccos(\cos(-5\pi))$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$ *et* $\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

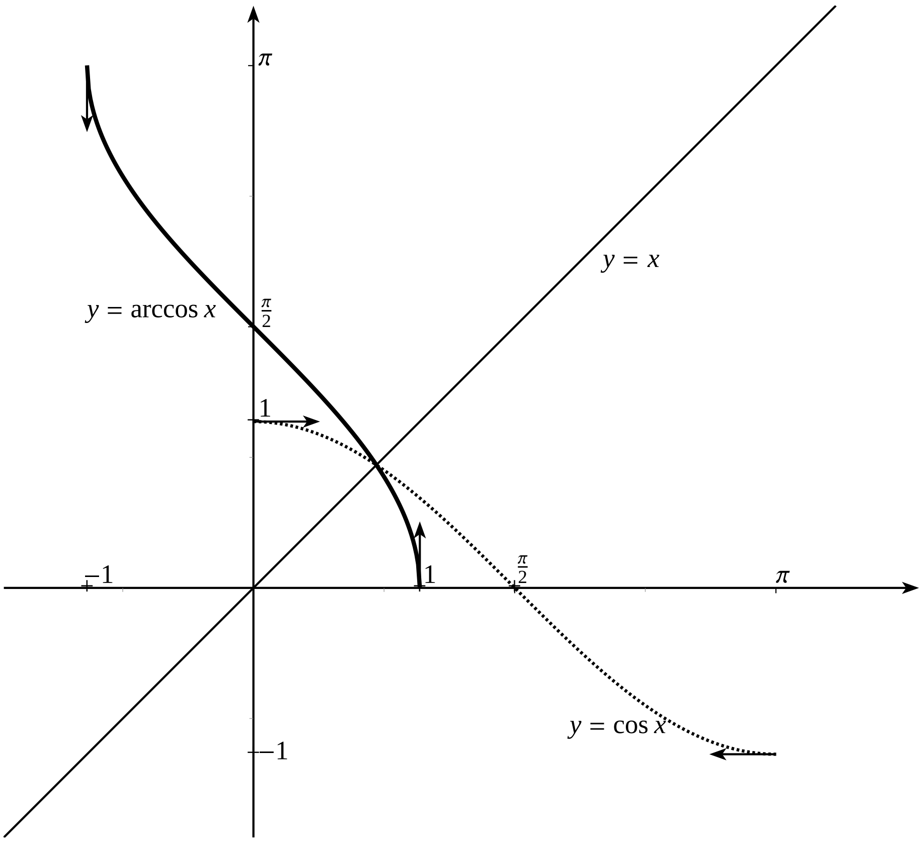


Figure 8.13 – Courbe de arccos

Théorème 8.43

- arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- arccos n'est pas dérivable en -1 et en 1, sa courbe y admet des tangentes verticales.

⇝ EXERCICE 8.22

Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Définition 8.44

La fonction tan :

- est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- vérifie $\tan x \underset{x\to -\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\tan x \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque, notée arctan, est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, on a $\arctan x \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$ et $\arctan x \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Remarque

Si $x \in \mathbb{R}$, il y a une infinité de réels dont la tangente vaut x. Parmi tous ces réels, un seul appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: c'est par définition $\arctan x$.

Proposition 8.45

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$.
- $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan\theta) = \theta$.
- arctan est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

EXERCICE 8.23

Calculer $\arctan\left(\tan \frac{19\pi}{5}\right)$.

Théorème 8.46

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

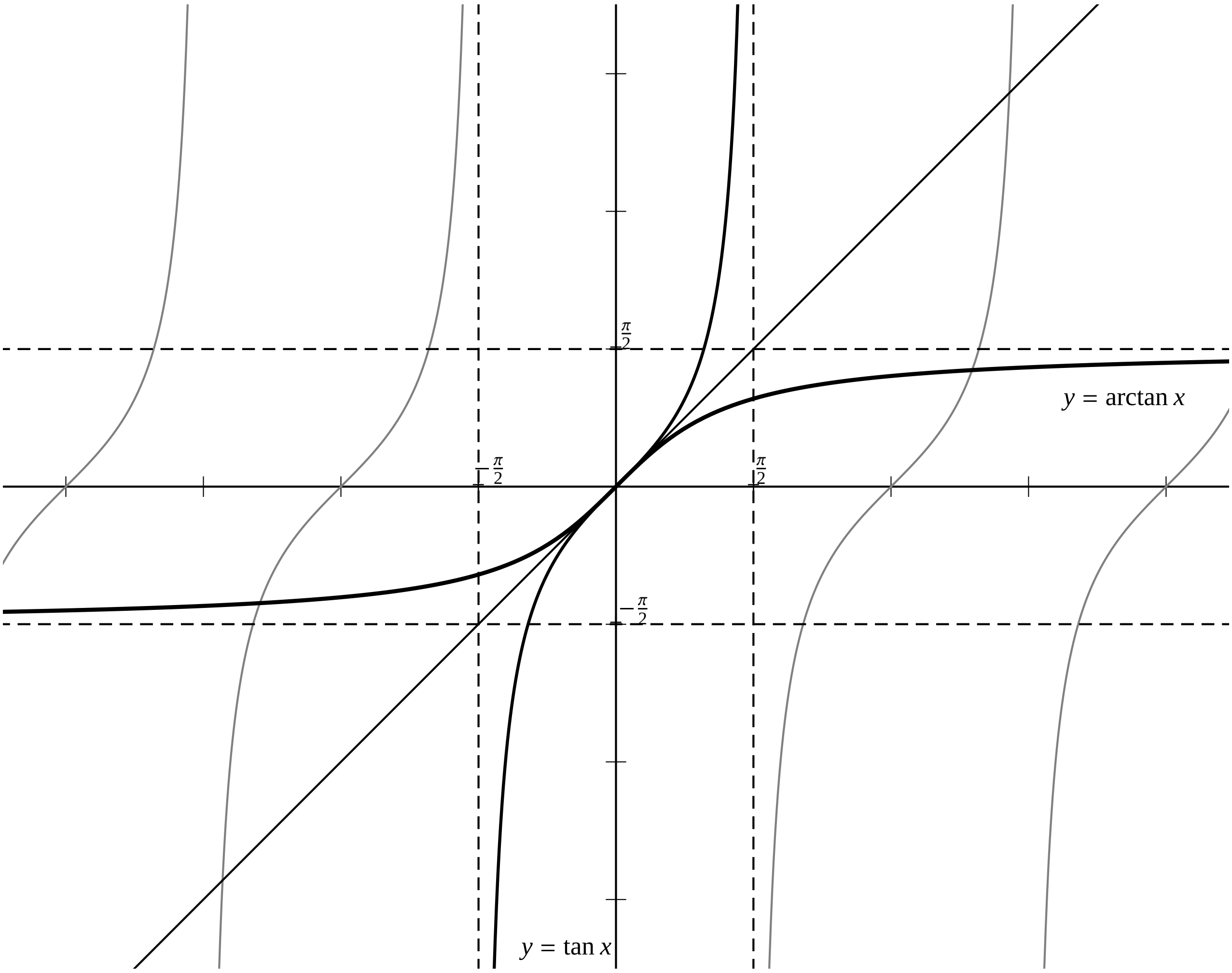


Figure 8.14 – Courbe de arctan

4 Formules de Taylor

Théorème 8.47
Égalité de Taylor-Lagrange

Soient I un intervalle non réduit à un point, f de classe C^{n+1} sur I et $a, b \in I$, $a \neq b$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ (ou $]b, a[$ si $b < a$) tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Remarques

- En prenant $n = 0$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.
- En posant $b = a + h$, la formule dit alors qu'il existe c entre a et $a + h$ tel que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

⇝ Exercice 8.24

Pour $x \geqslant 0$, on considère la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.
Montrer que $\forall x \in]0,1],\ u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$.

Théorème 8.48
Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, f de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in [a,b],\ f^{(n+1)}(x) \geqslant m$, alors
$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \geqslant m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$
- Si $\forall x \in [a,b],\ f^{(n+1)}(x) \leqslant M$, alors
$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$
- Si $\forall x \in [a,b],\ |f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, alors
$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarques

- Si l'on a $b < a$, ces inégalités restent valables en remplaçant $[a,b]$ par $[b,a]$.
- Ces inégalités sont des corollaires immédiats de l'égalité de Taylor-Lagrange. Cela tombe bien, car, comme elles ne figurent pas au programme, il est souvent demandé de les re-démontrer à partir de l'égalité de Taylor-Lagrange (qui, elle, est au programme).
- Comme f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ et donc bornée. Ainsi, il est toujours possible de trouver des réels m et M satisfaisant les hypothèses.

EXEMPLE 8.25

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

TRAVAUX DIRIGÉS

EXERCICE 8.26

Soient I un intervalle centré en 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. *On suppose que f est paire. Que peut-on dire sur f' ?*

2. *Même question si l'on suppose f impaire.*

EXERCICE 8.27

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f dérivable en a. Montrer que $\lim\limits_{x \to a^{\neq}} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ existe, et déterminer sa valeur.

EXERCICE 8.28

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

1. *Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.*

2. *Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de $y \in J$.*

3. *Montrer que f est dérivable en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.*

EXERCICE 8.29

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que f' est croissante sur I (i.e. que f est «convexe»).

1. *Montrer que tout x de $]a, b[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Interpréter graphiquement ce résultat.*

2. *En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(ta+(1-t)b)) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$. Interpréter graphiquement ce résultat.*

EXERCICE 8.30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

2. *Étudier l'existence de $f''(0)$.*

3. *On souhaite montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

  a. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.*

  b. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$, où P_n est une fonction polynôme.*

  c. *Conclure.*

EXERCICE 8.31

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (i.e. f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$).

1. *Montrer que $\forall x > 0,\ \frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.*

2. *En déduire que $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante. Comment ce résultat peut-il s'interpréter graphiquement ?*

EXERCICE 8.32

Soient $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R})$ tel que f s'annule au moins n fois.
Montrer que $f^{(n-1)}$ s'annule au moins une fois.

EXERCICE 8.33

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente en c à C_f passe par l'origine.
On pourra considérer l'application $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

EXERCICE 8.34

On considère une fonction $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ telle que $|f| \leqslant 1$ et $|f''| \leqslant 1$. Montrer que $|f'| \leqslant 2$.

EXERCICE 8.35

Soit $f \in C^1([0,1])$ telle que $f(0) = 0$.
On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $b \in]0,1[$ tel que $f'(b) = 0$.

EXERCICE 8.36

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

EXERCICE 8.37

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

1. *Déterminer le domaine maximal de définition de f, et montrer que f est continue.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et déterminer l'expression de $f'(x)$ pour les réels x en lesquels f est dérivable.*
3. *Déterminer une expression plus simple de $f(x)$ en fonction de x.*

EXERCICE 8.38

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bijective, et que f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $f'(x)^2$ et $f(x)^2$.*
3. *En déduire l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.*
4. *Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.*

EXERCICE 8.39

Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

ÉTUDES

EXERCICE 8.40

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (X^2+1)P_n' - 2(n+1)XP_n \end{cases}$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de P_n et montrer que son coefficient dominant est $(-1)^n(n+1)!$.
3. *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

4. *En dérivant 2 fois la relation $(x^2+1)f(x) = 1$, obtenir une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.*
5. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et g continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ vérifiant $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g(a)$.*
   Soit également h la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} h(u) = g\left(a + \frac{1}{u} - 1\right) & \text{si } u \in]0,1] \\ h(0) = g(a) \end{cases}$$

   a. *Montrer que h est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.*
   b. *Pour $x \geqslant a$, exprimer $g(x)$ à l'aide de h.*
   c. *Montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que $h'(d) = 0$.*
   d. *En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.*

   On montrerait de même, et l'on admettra dans la suie, que si g est une fonction continue sur $]-\infty, a]$ et dérivable sur $]-\infty, a[$ vérifiant $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} g(a)$, alors il existe $c \in]-\infty, a[$ tel que $g'(c) = 0$.
6. **a.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les limites de $f^{(n)}(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.*
   b. *Montrer par récurrence, en utilisant la question 5, que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$.*
   c. *Montrer qu'en fait $f^{(n)}$ s'annule exactement n fois sur $\mathbb{R}$.*
7. **a.** *Soit g une fonction paire dérivable. Déterminer la parité de g'.*
   b. *En déduire la parité de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
   c. *Que peut-on dire sur la disposition des racines des polynômes P_n ?*

EXERCICE 8.41

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On rappelle que :
- *un* point fixe *de f est une solution de l'équation $f(x) = x$;*
- *un intervalle I est dit stable par f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.*

Partie 1

On suppose dans cette partie que $[a, b]$ est stable par f.

1. *Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$.* On pourra considérer $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. *On suppose dans cette question que f est dérivable sur $[a, b]$ et qu'il existe $M_1 \in [0, 1[$ tel que*

$$\forall x \in [a, b],\ |f'(x)| \leqslant M_1$$

On considère un réel $x_0 \in [a, b]$ et l'on définit une suite u par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a. *Montrer que f admet un unique point fixe α.* On pourra procéder par l'absurde.

b. *Montrer que la suite u est bien définie et que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M_1^n |x_0 - \alpha|$$

c. *En déduire que u converge vers α.*

Partie 2

On suppose dans cette partie que f est C^2 sur $[a, b]$ et qu'il existe un $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et $f'(\alpha) = 0$.

1. *Montrer qu'il existe $M_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a, b],\ |f''(x)| \leqslant M_2$.*

2. *On souhaite montrer qu'il existe un intervalle $I \subset [a, b]$ non réduit à un point stable par f.*

a. *Montrer que si $M_2 = 0$, on peut prendre $I = [a, b]$.*

b. *On suppose désormais $M_2 > 0$ et l'on pose $J = \left[\alpha - \frac{1}{M_2}, \alpha + \frac{1}{M_2}\right] \cap [a, b]$.*

i. *Montrer que $\forall x \in J,\ |f'(x)| \leqslant 1$.*

ii. *En déduire que $I = J \cap [\alpha - m, \alpha + m]$, où $m = \min(\alpha - a, b - \alpha)$, convient.*

3. a. *Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{M_2}{2}|x - \alpha|^2$.*

b. *On considère un réel $x_0 \in I$ et la suite u définie par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.*
Montrer que u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{M_2}{2}\right)^{2^n - 1} |x_0 - \alpha|^{2^n}$.

Partie 3

On considère la fonction $f : [1, 2] \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et la suite u définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. *Dresser le tableau de variation de f.*

2. *À l'aide des résultats de la partie 1, montrer que u est bien définie et tend vers $\sqrt{2}$.*

3. *Á l'aide des résultats de la partie 2, montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.*

4. *On souhaite obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec 100 chiffres significatifs. Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle on peut affirmer que u_n convient.*
On donne $\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 3{,}3$ et l'on rappelle que les puissances de 2 se calculent facilement.

Exercices supplémentaires

Exercice 8.42

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^n \ln x$.
Déterminer $f_n^{(n+1)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8.43

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8.44

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8.45

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \leqslant 1$.
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.46

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8.47

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in C^2([a,b])$.

1. *Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{16}\left(f''(c_1) + f''(c_2)\right).$$

2. *En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Exercice 8.48

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ f''(t) \leqslant 0 \\ f(0 = f(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant 0$.

Exercice 8.49

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *bornée et atteignant ses bornes. Montrer que*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + f'(x)$$

Exercice 8.50

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \leqslant 0$.
On pose $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \leqslant 0$.

Exercice 8.51

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.
Calculer $f_n^{(n)}(x)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8.52

Montrer que pour $u > 0$ *et* $v \in \mathbb{R}$, *on a* $uv \leqslant u \ln u + e^{v-1}$.

Exercice 8.53

Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geqslant \alpha$.

1. *Montrer que* f' *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. *On notera* $g = f^{-1}$.

2. *Montrer que* g *est dérivable et donner sa dérivée.*

3. *On pose* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto xg(x) - f(g(x))$. *Montrer que* h *est deux fois dérivable et que* $h' = g$.