CHAPITRE 3

# SUITES RÉELLES

## 1 Compléments sur les réels

### 1.1 Rappels

#### 1.1.a Valeur absolue

**Définition 3.1**

Soient $x$ et $y$ deux réels. On note

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y \\ y & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant y \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque**

On étend de manière naturelle cette définition à un ensemble fini de réels : $\min(x_1, \dots, x_n)$ désigne le plus petit des réels $x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\max(x_1, \dots, x_n)$ le plus grand de ces réels.

**Définition 3.2**

La fonction valeur absolue est définie par

$$\begin{array}{rccl} |\bullet| : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \max(x, -x) \end{array}$$

**Remarques**

- De manière équivalente, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$
- La fonction valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on pourra donc considérer que son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+$ quand c'est plus pratique.
- $|x - y|$ correspond à la distance entre les deux réels $x$ et $y$ et donc $|x|$ à la distance entre $x$ et 0.

**Théorème 3.3**

Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. On a
- $|x| \geqslant 0$
- $|x| = 0$ ssi $x = 0$
- $|x| \leqslant a$ ssi $-a \leqslant x \leqslant a$ ssi ($x \leqslant a$ et $-x \leqslant a$)
- $|x| < a$ ssi $-a < x < a$ ssi ($x < a$ et $-x < a$)
- $|xy| = |x||y|$
- Si $x \neq 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

- $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ **inégalité triangulaire**
- $|x+y| \geqslant |x|-|y|$

**Remarques**

- Un corollaire souvent utile : si $\varepsilon > 0$, $|x-x_0| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon \leqslant x \leqslant x_0+\varepsilon$.
- L'inégalité triangulaire s'étend aux sommes finies : $|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+\cdots+|x_n|$ ou, sans pointillés, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_i|$.

#### 1.1.b Partie entière

**Définition 3.4**

Pour $x \in \mathbb{R}$, la *partie entière* de $x$ est définie par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x\}$$

**Proposition 3.5**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leqslant x < n+1$
- $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

#### 1.1.c Voisinages

**Définition 3.6**

On appelle *droite réelle achevée* et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

**Définition 3.7**

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Un *voisinage* de $a$ dans $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
- Un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
- Un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

**Remarques**

- Intuitivement, un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble qui contient tous les réels suffisamment proches de $a$.
- En pratique, on peut se limiter aux voisinages de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ quand $a \in \mathbb{R}$, $]A,+\infty[$ quand $a=+\infty$ et $]-\infty, A[$ quand $a=-\infty$.

**Définition 3.8**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Une propriété $P(x)$ est dite vraie *pour $x$ au voisinage de $a$* s'il existe un voisinage $I$ de $a$ tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x$ de $I$.

### EXEMPLE 3.1

- *Pour $x$ au voisinage de $+\infty$, on a $x^2 \geqslant 100$. En effet, $I = [500, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ et, pour tout $x$ de $I$, on a $x^2 \geqslant 500^2 \geqslant 100$.*
- *Pour $x > 0$ au voisinage de $0$, on a $x^2 < x$. En effet, pour $0 < x < \frac{1}{2}$, on a $0 < x^2 < \frac{1}{2}x < x$.*

### 1.2 Bornes inférieures et supérieures

**Définition 3.9**

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :
- $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de $E$ si $\forall x \in E,\ m \leqslant x$ ;
- $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de $E$ si $\forall x \in E,\ x \leqslant M$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *minorée* si elle admet un minorant, *majorée* si elle admet un majorant, *bornée* si elle est minorée et majorée.

**Remarque**

Si $E$ est majorée par $M$, alors elle est aussi majorée par $M + 12$ (par exemple). Un majorant n'est donc pas unique (de même pour un minorant).

EXEMPLE 3.2

1. $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \in [2, 4]\}$ *est majoré par* $2$ *et minoré par* $-2$. *Il est donc borné. Il est bien sûr aussi majoré par* $10^{723}$.
2. $]7, +\infty[$ *est minoré par 7 (et par tous les réels inférieurs ou égaux à 7), mais n'est pas majoré et donc pas borné.*
3. $\left\{x \in \mathbb{R}, x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ *n'est ni minoré, ni majoré.*

EXERCICE 3.3

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Donner une version complètement quantifiée des propositions suivantes.*
1. *$A$ est majorée.*
2. *$A$ est bornée.*

**Définition 3.10**

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :
- $m$ est le plus petit élément (ou *minimum*) de $E$ si :
  - $m \in E$
  - $m$ minore $E$
- $M$ est le plus grand élément (ou *maximum*) de $E$ si :
  - $M \in E$
  - $M$ majore $E$

**Remarques**
- On a donc $m = \min E \Leftrightarrow (m \in E \text{ et } \forall x \in E,\ m \leqslant x)$.
- De même, $M = \max E \Leftrightarrow (M \in E \text{ et } \forall x \in E,\ x \leqslant M)$.
- S'ils existent, le minimum et le maximum d'un ensemble sont uniques.
- Une partie de $\mathbb{R}$ peut être minorée sans avoir de minimum (ou majorée sans avoir de maximum). Voir l'exercice 3.4.

⇝ EXERCICE 3.4

*Déterminer, s'ils existent, le minimum et le maximum de* $\left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Une propriété *qui ne concerne pas les nombres réels*, mais qui n'en est pas moins importante :

**Proposition 3.11**
*Principe du minimum pour les entiers*

- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

**Remarques**

- Cette propriété est intimement liée au principe de récurrence.
- Si l'on sait (ou que l'on suppose) qu'une certaine propriété $P$ est vérifiée par au moins un entier naturel, on peut donc parler du plus petit entier naturel $n$ tel que $P(n)$ soit vraie.

EXERCICE 3.5 **Unicité de la décomposition en base 2**

*Soient* $(a_0, \dots, a_n)$ *et* $(b_0, \dots, b_n)$ *dans* $\{0,1\}^{n+1}$.
*Montrer que si* $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i 2^i = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i 2^i$, *alors* $\forall i \in [\![0,n]\!],\ a_i = b_i$.

**Définition 3.12**

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $m$ est la borne inférieure de $E$ si $m$ est le plus grand minorant de $E$. On note alors $m = \inf E$.
- On dit que $M$ est la borne supérieure de $E$ si $M$ est le plus petit majorant de $E$. On note alors $M = \sup E$.

**Remarque**

Si elles existent, les bornes inférieures et supérieures d'une partie sont uniques.

EXEMPLE 3.6

*La borne inférieure de* $]1,2]$ *est 1, la borne supérieure 2. Notez que cet ensemble a une borne inférieure mais pas de minimum.*

**Théorème 3.13**
*Propriété de la borne supérieure*

- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une (unique) borne inférieure.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une (unique) borne supérieure.

**Remarque**

Cette propriété signifie que $\mathbb{R}$ est «sans trou» (on dit que $\mathbb{R}$ est *complet*). Les nombres réels ont été introduits précisément parce que les rationnels n'ont pas cette propriété. Sa démonstration repose sur la manière dont l'ensemble $\mathbb{R}$ a été construit et dépasse donc très largement le cadre du programme.

**Proposition 3.14**

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- $A$ admet un minimum ssi $A$ est minorée et $\inf A \in A$.
  On a alors $\min A = \inf A$.
- $A$ admet un maximum ssi $A$ est majorée et $\sup A \in A$.
  On a alors $\max A = \sup A$.

EXERCICE 3.7

*Dans chacun des cas suivants, déterminer, s'ils existent,* $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ *et* $\max A$.

**1.** $A = \{2^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. **2.** $A = \{|x \sin x|,\ x \in \mathbb{R}\}$. **3.** $A = \{x - \lfloor x \rfloor,\ x \in \mathbb{R}\}$.

# 2 Propriétés élémentaires des suites

## 2.1 Suite réelle

**Définition 3.15**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle *suite réelle* (définie à partir du rang $n_0$) une application

$$u : \begin{array}{ccc} [\![n_0, +\infty[\![ & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

On note usuellement $u_n$ pour $u(n)$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ pour $u$.

**Remarques**
- $u_{n_0}$ est appelé *terme initial* de $u$.
- $u_n$ est appelé *terme de rang $n$* ou *terme d'indice $n$* de $u$.
- On prendra garde à ne pas confondre $u_n$ (qui est un nombre réel) et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ qui est (essentiellement) l'ensemble infini $(u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \ldots)$.

Une suite peut être définie de plusieurs manières.
- Par la donnée de son *terme général* : par exemple, en posant pour $n \geqslant 2$ $u_n = \frac{1}{\ln n}$, on définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.
- Par récurrence, en donnant la valeur d'un ou plusieurs termes initiaux et un moyen de calculer $u_{n+1}$ à partir de $u_0, \ldots, u_n$ (et éventuellement de $n$).
  - Récurrence simple : $u_{n+1}$ ne dépend que de $u_n$ (et éventuellement de $n$).
    **Exemple :** $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + n$.
  - Récurrence double : pour calculer un nouveau terme, on a besoin des deux termes précédents.
    **Exemple :** $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}$.
  - On peut aussi avoir besoin de tous les termes $u_0$ jusqu'à $u_n$ pour calculer $u_{n+1}$.
    **Exemple :** $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- Implicitement : en montrant que pour tout entier $n$, il existe un unique $x_n$ vérifiant une certaine propriété, on définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
  **Exemple :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n)$ : $e^x - nx = 2$ a une unique solution $x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit ainsi la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$.

On peut parfois (mais pas toujours !) déterminer le terme général d'une suite définie implicitement ou par récurrence.

⇝ EXERCICE 3.8

*Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.*

**Définition 3.16**

Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dite *à termes positifs* (resp. à termes négatifs) si
$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0$ (resp. $u_n \leqslant 0$).

**Remarques**
- On définit de même une suite à terme strictement positifs ou strictement négatifs.
- De même, une suite à termes dans $[0, 1]$ est une suite telle que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \in [0, 1]$.

**Définition 3.17**

- On dit qu'une suite $(u_n)$ a la propriété $P$ *à partir du rang $N$* si la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ a la propriété $P$.
- On dit qu'une suite $(u_n)$ a la propriété $P$ *à partir d'un certain rang* s'il existe un rang $N$ tel que $(u_n)$ ait la propriété $P$ à partir du rang $N$.

EXEMPLE 3.9

> *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - 7$ est à termes positifs à partir du rang 7 (et donc à partir d'un certain rang).*

### 2.2 Variations d'une suite

**Définition 3.18**

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite
- *croissante* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$ ;
- *strictement croissante* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} > u_n$ ;
- *décroissante* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$ ;
- *strictement décroissante* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} < u_n$ ;
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Remarques**
- Attention, la «plupart» des suites ne sont bien sûr ni croissantes ni décroissantes (*i.e. non monotones*).
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante à partir d'un certain rang si $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

**Définition 3.19**

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :
- *périodique de période $k$* (où $k \in \mathbb{N}^*$) si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+k} = u_n$ ;
- *périodique* si elle est périodique de période $k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ ;
- *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

**Proposition 3.20**

Soient $u$ et $v$ deux suites.
- Si $u$ et $v$ sont croissantes, alors $u + v$ est croissante.
- Si $u$ et $v$ sont décroissantes, alors $u + v$ est décroissante.
- $u$ est croissante ssi $-u$ est décroissante.

**Proposition 3.21**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à termes strictement positifs.
- $u$ est croissante ssi $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- $u$ est strictement croissante ssi $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- $u$ est décroissante ssi $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$
- $u$ est strictement décroissante ssi $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

### 2.3 Suites bornées

**Définition 3.22**

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :
- *minorée par $m$* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant m$ ;
- *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle qu'elle soit minorée par $m$ ;
- *majorée par $M$* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant M$ ;

- *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle qu'elle soit majorée par $M$ ;
- *bornée* si elle est minorée et majorée.

**Remarques**

- Attention, la constante $M$ doit bien sûr être **indépendante de** $n$. Par exemple, le fait qu'une suite $u$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n-2$ ne garantit absolument pas qu'elle est majorée.
- Le caractère minoré, majoré ou borné d'une suite $u$ est une propriété dite *asymptotique*, c'est-à-dire qu'il n'est pas modifié si l'on change un nombre fini de termes de $u$.

**Proposition 3.23**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.
$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ssi $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

**Remarque**

Autrement dit, une suite $u$ est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M$.

# 3 Suites usuelles

## 3.1 Suites arithmétiques

**Définition 3.24**

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite *arithmétique de raison r* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + r$.

**Proposition 3.25**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle et $r \in \mathbb{R}$.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est arithmétique de raison $r$ ssi $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.

## 3.2 Suites géométriques

**Définition 3.26**

Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite *géométrique de raison q* si $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = qu_n$.

**Proposition 3.27**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle et $q \in \mathbb{R}$.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est géométrique de raison $q$ ssi $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

## 3.3 Suites arithmético-géométriques

**Définition 3.28**

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n + b.$$

**Proposition 3.29**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite telle que $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n + b$. On a

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = a^{n-n_0}\left(u_{n_0} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

**Remarque**

Cette propriété n'est **pas à retenir**. Il faut connaître la méthode permettant de la retrouver dans un cas particulier.

EXERCICE 3.10

*Déterminer le terme général de la suite définie par* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$

## 3.4 Suites récurrentes linéaires doubles

**Proposition 3.30**

Soient $a$ et $b$ deux réels et $u$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On définit le *polynôme caractéristique* de $u$ par $P = X^2 - aX - b$.

- Si $P$ a deux racines réelles distinctes $x_1$ et $x_2$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

- Si $P$ a une racine réelle double $x$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x^n(\lambda + \mu n)$$

- Si $P$ a deux racines complexes non réelles $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

**Remarques**

- Les constantes $\lambda$ et $\mu$ sont généralement déterminées grâce aux premiers termes de la suite.
- Dans le cas où les racines sont complexes non réelles, on peut aussi mettre $u_n$ sous la forme $r^n \cos(n\theta + \varphi)$.

⇝ EXERCICE 3.11

*La* suite de Fibonacci *est définie par* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
*Déterminer l'expression de* $u_n$ *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$.

⇝ EXERCICE 3.12

*Soit* $u$ *la suite définie par* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
*Déterminer le terme général de* $u$.

# 4 Comportement asymptotique

## 4.1 Définitions et propriétés élémentaires

**Définition 3.31**

Soit $u$ une suite réelle. On dit que

- $u$ tend vers $l \in \mathbb{R}$, et l'on note $u \to l$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$) si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

- $u$ tend vers $+\infty$, et l'on note $u \to +\infty$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

- $u$ tend vers $-\infty$, et l'on note $u \to -\infty$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant A$$

**Remarque**

On peut unifier ces définitions en utilisant les voisinages : pour $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $u \to l$ signifie que tout voisinage de $l$ contient tous les termes de $u$ à partir d'un certain rang.

EXEMPLE 3.13

*Soit $u$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} + 3$. On a $u \to +\infty$.*

**Définition 3.32**

Soit $u$ une suite.

- On dit que $u \to 0^-$ si $u \to 0$ et si $u$ est à termes strictement négatifs (à partir d'un certain rang).
- On dit que $u \to 0^+$ si $u \to 0$ et si $u$ est à termes strictement positifs (à partir d'un certain rang).

**Théorème 3.33**
*Unicité de la limite*

Soit $u$ une suite réelle. Si $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $l = l'$.

**Remarque**

Autrement dit, si une suite a une limite, alors cette limite est unique. On pourra donc utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ au lieu de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

**Définition 3.34**

Une suite est dite :

- *convergente* si elle tend vers $l \in \mathbb{R}$ ;
- *divergente* sinon.

**Remarques**

- Une suite est donc divergente dans les trois cas suivants :
  - si elle tend vers $+\infty$ ;
  - si elle tend vers $-\infty$ ;
  - si elle n'a pas de limite.

- Donner le comportement asymptotique d'une suite $u$, c'est dire si $u$ converge (et dans ce cas, vers quelle limite), si $u$ tend vers $+\infty$, si $u$ tend vers $-\infty$ ou si $u$ n'a pas de limite.

**Proposition 3.35**

Soit $u$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \quad |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

**Remarque**

En particulier, $u \to 0$ ssi $|u| \to 0$.

**Proposition 3.36**

Soient $u$ et $v$ deux suites réelles.
Si $u$ et $v$ coïncident à partir d'un certain rang, alors $u$ et $v$ ont le même comportement asymptotique.

**Remarques**

- $u$ et $v$ coïncident à partir d'un certain rang signifie $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N,\ u_n = v_n$.
- $u$ et $v$ ont le même comportement asymptotique signifie que si $u$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v$ tend vers le même $l$ et que si $u$ n'a pas de limite, alors $v$ non plus.
- Autrement dit, on ne modifie pas le comportement asymptotique d'une suite en changeant la valeur d'un nombre fini de termes.

**Proposition 3.37**

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi : [\![n_0, +\infty[\![ \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $u$ une suite réelle.
Si $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

**Remarque**

Il faut surtout retenir les cas particuliers suivants : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l, \ldots$

⇝ EXERCICE 3.14

> *Montrer que la suite $u$, définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, n'a pas de limite.*

La réciproque est en général fausse, mais on a la propriété (très utile) suivante :

**Proposition 3.38**

Soit $u$ une suite réelle. Si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

EXERCICE 3.15

> *Soit $u$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 + (-1)^n)n + (1 - (-1)^n)2^n$. Montrer que $u \to +\infty$.*

**Proposition 3.39**

Soit $u$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}^*$. À partir d'un certain rang, les termes de $u$ sont non nuls et du signe de $l$.

### 4.2 Opérations sur les limites

On étend (partiellement) à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations algébriques usuelles en posant :
- $-\infty + x = -\infty$ si $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- $+\infty + x = +\infty$ si $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- $-\infty \times x = +\infty$ si $x \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$
- $-\infty \times x = -\infty$ si $x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$
- $+\infty \times x = -\infty$ si $x \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$
- $+\infty \times x = +\infty$ si $x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$
- $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$ si $x \in \mathbb{R}$

On remarquera les cas manquants qui correspondent aux formes indéterminées : $-\infty + (+\infty)$, $\infty \times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$.
On pose aussi $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Proposition 3.40**

Soit $u$ une suite et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lambda u \to \lambda l$.

**Proposition 3.41**

Soient $u$ et $v$ deux suites, $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $l + l'$ est défini, alors $u + v \to l + l'$.
- Si $l \times l'$ est défini, alors $u \times v \to l \times l'$.

**Remarques**
- On en déduit que si $u$ et $v$ sont convergentes, alors $u + v$ et $uv$ aussi.
- Si $l - l'$ est défini, alors $u - v \to l - l'$ comme on peut le voir en remarquant que $u - v = u + (-1) \times v$.

EXERCICE 3.16

> *Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.*

**Proposition 3.42**

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $u$ une suite à termes dans $D$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

**Remarques**
- Nous n'avons pas encore (re)vu les limites de fonctions, mais les limites de référence de terminale sont quand même supposées connues…
- En particulier, comme $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
- En utilisant la fonction inverse, on obtient la limite de $\frac{1}{u}$ (si $u$ est à termes non nuls) et donc d'un quotient.

### 4.3 Propriétés liées à l'ordre

**Proposition 3.43**
*Passage à la limite*

Soient $u$ et $v$ deux suites et $n_0$ un entier.
Si
- $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$
- $v \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$
- $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$

alors $l \leqslant l'$.

**Remarques**

- Cette propriété est très souvent utilisé avec l'une des deux suites constante : par exemple, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2$ et si $u \to l$, alors $l \geqslant 2$.
- **Attention**, même si l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$, on **ne peut pas en déduire** $l < l'$.
- **Attention (bis)**, il faut déjà avoir prouvé l'existence des deux limites $l$ et $l'$.

**Théorème 3.44**
*Limite par comparaison*

Soient $n_0$ un entier et $u$ et $v$ deux suites telles que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

- Si $u \to +\infty$, alors $v \to +\infty$.
- Si $v \to -\infty$, alors $u \to -\infty$

**Théorème 3.45**
*Limite par encadrement*

Soient $n_0$ un entier et $u$, $v$ et $w$ trois suites telles que
$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $u \to l$ et $w \to l$, alors $v \to l$.

**Remarques**

- Ce théorème est couramment appelé «théorème des gendarmes». Soit...
- Le théorème n'a d'intérêt que lorsque $l \in \mathbb{R}$ (sinon on peut conclure par comparaison).

EXEMPLE 3.17

> *Soit $u$ une suite bornée et $v$ telle que $v \to 0$. On a $uv \to 0$.*

EXERCICE 3.18

> *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (on encadrera $u_n$).*

**Proposition 3.46**

Toute suite convergente est bornée.

**Remarque**

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Théorème 3.47**
*Limite monotone*

Soit $u$ une suite monotone à partir d'un certain rang.

- $u$ a une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $u$ est croissante (à partir d'un certain rang) :
  - si $u$ est majorée, alors $u$ est convergente (*i.e.* $l \in \mathbb{R}$) ;
  - si $u$ n'est pas majorée, alors $u \to +\infty$.
- Si $u$ est décroissante (à partir d'un certain rang) :
  - si $u$ est minorée, alors $u$ est convergente (*i.e.* $l \in \mathbb{R}$) ;
  - si $u$ n'est pas minorée, alors $u \to -\infty$.

**Remarques**
- C'est le théorème le plus important du chapitre.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors sa limite est $l = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, on a dans ce cas $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors sa limite est $l = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, on a dans ce cas $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant l$.

⇝ EXERCICE 3.19

*Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Montrer que $u \to +\infty$.*

EXERCICE 3.20

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leqslant x$.*
2. *En déduire le comportement asymptotique de la suite définie par la donnée de $u_0 \in [0, \pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.*

⇝ EXERCICE 3.21

*Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$. Déterminer le comportement asymptotique de u (on discutera suivant les valeurs de $u_0$).*

### 4.4 Suites adjacentes

**Définition 3.48**

Deux suites $u$ et $v$ sont dites *adjacentes* si :
- l'une est croissante ;
- l'autre est décroissante ;
- $u - v \to 0$.

**Proposition 3.49**

Si $u$ et $v$ sont deux suites adjacentes, alors $u$ et $v$ convergent et ont la même limite.

⇝ EXERCICE 3.22

*Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que u tend vers une limite finie.*
En fait, $u$ tend vers $e$.

### 4.5 Limites de référence

La plupart des limites connues en terminale sont rappelées ici. Il manque cependant, certaines limites de fonctions usuelles (qui peuvent servir pour des suites du type $u_n = f(u_n)$) : elles sont malgré cela supposées connues.

**Proposition 3.50**

Soit $q \in \mathbb{R}$.
- Si $|q| < 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $q > 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

**Proposition 3.51**

- Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, $\dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{n^\alpha}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

⇝ Exercice 3.23

*Étudier les limites des expressions suivantes quand $n \to +\infty$.*

**1.** $\dfrac{2^{3n+2}+n^2}{8^n}$ **2.** $\dfrac{2^{\ln n}}{n}$ **3.** $\dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$

# 5 Comparaison de suites

## 5.1 Suite négligeable devant une autre

**Définition 3.52**

Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit que $u$ est *négligeable devant $v$* s'il existe un entier naturel $n_0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n = \mathrm{o}_{n\to+\infty}(v_n)$.

**Remarques**

- Attention, la notation $u = \mathrm{o}(v)$ peut prêter à confusion : ce n'est pas une égalité (contrairement aux apparences). Si l'on a $u = \mathrm{o}(v)$ et $w = \mathrm{o}(v)$, cela ne signifie pas du tout $u = w$. Cela signifie seulement que $u$ et $w$ sont toutes deux «beaucoup plus petites» que $v$. On lira donc «$u$ est un petit-o de $v$» ou «$u$ est négligeable devant $v$» et pas «$u$ égale petit-o de $v$».
- Comme une suite est toujours étudiée au voisinage de $+\infty$, on peut noter $u_n = \mathrm{o}_n(v_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Comme pour les limites, la négligeabilité est une propriété asymptotique : elle ne dépend que du comportement de $u_n$ et $v_n$ pour des valeurs de $n$ suffisamment grandes.

Exemple 3.24

*On a $\forall n \geqslant 1,\ n^2 = \frac{1}{n}n^3$ et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $n^2 = \mathrm{o}_{n\to+\infty}(n^3)$.*

**Proposition 3.53**

Soient $u$ et $v$ deux suites. S'il existe un rang $n_0$ à partir duquel $v$ ne s'annule plus, alors

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ si et seulement si } \frac{u}{v} \to 0$$

**Remarque**

C'est cette caractérisation qui sert le plus souvent en pratique.

**Proposition 3.54**

Soient $u, u', v, v', w$ des suites réelles.

- Si $u = o(v)$ et si $v = o(w)$, alors $u = o(w)$. **transitivité**
- Si $u = o(v)$ et si $u' = o(v)$, alors $u + u' = o(v)$.
- Si $u = o(v)$, on a $uw = o(vw)$.
- Si $u = o(v)$ et si $u' = o(v')$, alors $uu' = o(vv')$.
- Si $u = o(v)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u = o(v)$ et $u = o(\lambda v)$.

On peut reformuler les limites de référence en termes de «petit-o» :

**Proposition 3.55**

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$, on a $(\ln n)^a = o_n\left(n^b\right)$.
- Si $b < c$, on a $n^b = o_n(n^c)$.
- Si $\alpha > 1$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $n^b = o_n(\alpha^n)$.
- Si $1 < \alpha < \beta$, on a $\alpha^n = o_n(\beta^n)$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha^n = o_n(n!)$.

⇝ EXERCICE 3.25

*Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :*

$$n^{1,1} \quad ; \quad n(\ln n)^3 \quad ; \quad 2^{(n^2)} \quad ; \quad 2^{4n} \quad ; \quad e^{2n}$$

### 5.2 Suites équivalentes

**Définition 3.56**

Soient $u$ et $v$ deux suites.
On dit que $u$ est équivalente à $v$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $\varepsilon$ tels que :

$$\begin{cases} \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = (1+\varepsilon_n)v_n \end{cases}$$

On note alors $u \sim v$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

**Remarque**
Il est équivalent de demander l'existence d'une suite $\alpha$ telle que $\alpha \to 1$ et $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \alpha_n v_n$.

**Proposition 3.57**

Soient $u$ et $v$ deux suites. On suppose que $v$ est à termes non nuls (à partir d'un certain rang). On a alors :

$$u \sim v \text{ si et seulement si } \frac{u}{v} \to 1$$

**Remarque**
C'est cette caractérisation des suites équivalentes qui sert le plus souvent en pratique.

⇝ EXERCICE 3.26

*Montrer que* $\lfloor e^n \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.

**Proposition 3.58**

Soient $u, v, w$ trois suites.
- $u \sim v$ ssi $v \sim u$ **symétrie**
- $u \sim u$ **réflexivité**
- Si $u \sim v$ et $v \sim w$, alors $u \sim w$ **transitivité**

**Proposition 3.59**

Soient $u$ et $v$ deux suites.
- Si $u \sim v$ et que $u \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v \to l$.
- Si $u \to l$, que $v \to l$, **et que $l \in \mathbb{R}^*$**, alors $u \sim v$.

**Remarque**

Cette propriété sert assez rarement mais illustre la remarque suivante. Pour des suites admettant une limite finie non nulle, la notion d'équivalent n'apporte rien (on pourrait se contenter de dire que leurs limites sont égales). En revanche, pour des suites qui tendent vers 0 ou $\pm\infty$, la notion d'équivalent est *plus fine* que celle de limite : on rajoute une information sur la *vitesse* à laquelle la suite se rapproche de sa limite.

EXEMPLE 3.27

- *On a* $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *mais* $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \frac{1}{n^2}$.
- *De même,* $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *mais* $n^2 \underset{n\to+\infty}{\not\sim} 2^n$.

**Proposition 3.60**

Soient $u, u', v, v'$ quatre suites.
- Si $u \sim u'$ et $u = o(v)$, alors $u' = o(v)$.
- Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors $uu' \sim vv'$.
- Si $u \sim v$ et que $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k \sim v^k$.
- Si $u \sim v$ et que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u} \sim \frac{1}{v}$.
- Si $u \sim v$, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $u^\alpha \sim v^\alpha$.

**Remarques**
- Une opération n'est pas représentée ici : la somme. Il y a une très bonne raison à cela : **on ne peut pas sommer des équivalents !**
- On ne peut pas non plus composer des équivalents : par exemple, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il n'y a aucune raison pour que $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

EXEMPLE 3.28

*Soient u et v définies par* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = -1 + \frac{1}{n^2}$. *On a* $u \sim v$, *et pourtant* $1 + u \not\sim 1 + v$.

EXERCICE 3.29

*Déterminer un équivalent simple quand* $n \to +\infty$ *de* $\sum_{k=1}^{n} k$.

On peut parfois déterminer un équivalent d'une somme grâce à la propriété suivante :

**Proposition 3.61**

Soient $u$ et $v$ deux suites.
Si $v = o(u)$, alors $u + v \sim u$.

EXEMPLE 3.30

*Soit $P$ un polynôme non nul de degré $p$. On a* $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$.

**Proposition 3.62**
*Équivalents usuels*

Soit $u$ une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

$$\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad 1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$$

⇝ EXERCICE 3.31

*Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de* $n \ln\left(\frac{n-2}{n}\right)$.

EXERCICE 3.32

*Soit $u$ une suite telle que $u \to 0$. Déterminer un équivalent de* $\tan(u_n)$ *quand $n \to +\infty$.*

# TRAVAUX DIRIGÉS

## *Suites usuelles*

EXERCICE 3.33

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*
$u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4n - 1$.

1. *Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n + an)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmético-géométrique.*
2. *Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $u_n$ en fonction de $n$.*

EXERCICE 3.34

*On considère la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$.*

1. *Montrer que $u_n$ est bien défini et strictement négatif pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{u_n-1}$.*
   - **a.** *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
   - **b.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.*
   - **c.** *En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.*
   - **d.** *Déterminer la limite de $u_n$ quand $n \to +\infty$.*

## *Limites et comparaisons*

EXERCICE 3.35

*Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{3}$ ;*
3. *En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.*

EXERCICE 3.36

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0$ et $v_0$ tels que $0 < u_0 \leqslant v_0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. *Montrer que $u$ et $v$ sont bien définies et à termes positifs.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.*
3. *Étudier la monotonie des suites $u$ et $v$, et en déduire leur convergence.*
4. *Montrer que les limites de $u$ et $v$ sont égales.*

**Remarque :** *si $a, b \in \mathbb{R}_+$, on appelle $\frac{a+b}{2}$ leur* moyenne arithmétique *et $\sqrt{ab}$ leur* moyenne géométrique. *L'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ est à retenir (ainsi que sa démonstration).*

EXERCICE 3.37

*On considère la suite $u$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.*
2. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

EXERCICE 3.38

*Soient u et v deux suites telles que $u_0 \leqslant v_0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. *Montrer que ces deux suites sont adjacentes.*
2. *Étudier la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire la limite de u et de v.*

### Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

EXERCICE 3.39

*Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$.*

EXERCICE 3.40

*Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \ln(1 + x)$ et $a > 0$.*
*On définit une suite u par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *Montrer que u est bien définie.*
2. *Étudier le sens de variation de u (on pourra s'intéresser à $g : x \mapsto f(x) - x$).*
3. *Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.*

EXERCICE 3.41

*Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} | x \mapsto x^2 + \frac{2}{x}$ et u la suite définie par la donnée de $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
3. *Déterminer les solutions de l'équation $x^3 - x^2 + 2 = 0$, et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

EXERCICE 3.42

*On considère*

- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \mid x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

1. *Tracer l'allure de la courbe de f et représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)$ (on pourra choisir $u_0 = 4$ pour cette représentation graphique).*
2. *Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in [1, 3]$.*
3. **a.** *Justifier que $f \circ f$ est bien définie, et qu'elle est croissante.*
   **b.** *Déterminer les points fixes éventuels de $f \circ f$ (i.e. les $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(f(x)) = x$).*
4. *Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, et en déduire qu'elles convergent.*
5. *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.*

### Relations de comparaison et calculs de limites

EXERCICE 3.43

1. *Déterminer la limite éventuelle de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(\frac{2n(n+1)!}{(n+2)!}\right)$.*
2. *Montrer que $\ln(n^n)$ est négligeable devant $(n - \sqrt{n})^{\frac{3}{2}}$ quand $n \to +\infty$.*
3. *Comparer $u_n = e^{1+\frac{1}{n+1}} - e$ et $v_n = \ln(n + e) - \ln n$ quand $n \to +\infty$.*

## Exercice 3.44

*Montrer que* $\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

## Exercice 3.45

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ *existe et* $u_n > 0$*, puis que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. *En déduire que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

## Exercice 3.46

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par son premier terme* $u_1 \in \mathbb{R}$ *et par la relation* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$.

1. *Montrer que* $u_n \to 0$.
2. *En déduire un équivalent simple de* $(u_n)$.

## Exercice 3.47

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'équation* $x + \ln x = n$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}_+^*$*. On notera* $u_n$ *cette solution.*
2. *Étudier la limite de* $u_n$ *quand* $n \to +\infty$.
3. *Montrer que* $u_n \sim n$*, puis que* $u_n - n \sim -\ln n$.

# ÉTUDES

## EXERCICE 3.48

*Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ *et* $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

**1.** *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est bien définie et que* $\forall n \geqslant 0,\ u_n > 0$.

**2.** *On suppose que* $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant 1$.

- **a.** *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est croissante.*
- **b.** *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est convergente.*
- **c.** *Calculer sa limite, et montrer que c'est absurde.*

**3.** *En déduire qu'il existe* $n_0$ *tel que* $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 1$.

**4.** *On pose, pour tout* $n \geqslant 0$, $v_n = |u_n - 2|$.
*Montrer que* $\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}(v_{n+1} + v_n)$.

**5.** *On définit* $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ *par* $w_{n_0} = v_{n_0}$, $w_{n_0+1} = v_{n_0+1}$ *et* $\forall n \geqslant n_0, w_{n+2} = \frac{1}{3}(w_{n+1} + w_n)$.
*Montrer que* $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant w_n$.

**6.** *En déduire que* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

## EXERCICE 3.49

*Pour* $n \in N^*$, *on pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**1.**
- **a.** *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$.
  On passera par deux études de fonctions.
- **b.** *En déduire que* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.
- **c.** *Pour* $n \geqslant 2$, *en déduire les encadrement* $S_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant S_{n-1}$, *puis* $\ln n \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$.
- **d.** *Déterminer la limite et un équivalent simple de* $S_n$ *quand* $n \to +\infty$.

**2.** *On définit la suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *par* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = S_n - \ln n$.

- **a.** *Montrer que* $v$ *est décroissante.*
- **b.** *En déduire que* $v$ *tend vers une limite* $\gamma \in \mathbb{R}$.
  Cette limite $\gamma$ porte le nom de *constante d'Euler*. On a $\gamma \simeq 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,861$.

# EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

## EXERCICE 3.50

*Déterminer, s'ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble*

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

## EXERCICE 3.51

*Pour $n \geqslant 2$, on définit*

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

1. *Montrer que $v$ est géométrique.*
2. *En déduire le terme général de $u$ et sa limite.*

## EXERCICE 3.52

*Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$$

## EXERCICE 3.53

*Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.*
*Montrer que si $u$ est monotone, alors $v$ est monotone, de même monotonie que $u$.*

## EXERCICE 3.54

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u$ est bornée et que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*
*Montrer que $u$ converge.*

## EXERCICE 3.55

*On considère les suites définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(2n!)}{4^n (n!)^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = (n+1)u_n^2$$

1. *Montrer que $u$ converge.*
2. *Montrer que $v$ converge.*
3. *En déduire la limite de $u$.*

## EXERCICE 3.56

*On considère la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos\left(\frac{u_n}{n}\right) \end{cases}$$

1. *Montrer que $u \to 1$.*
2. *Déterminer un équivalent simple de $u_n - 1$ quand $n \to +\infty$.*

## EXERCICE 3.57

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. *En déduire la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.*

## EXERCICE 3.58

*Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $u$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que $u \to 1$.*
2. *Déterminer un équivalent simple de $u_n - 1$ quand $n \to +\infty$.*

## EXERCICE 3.59

*Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$ quand $n \to +\infty$.*

## EXERCICE 3.60

*On considère la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que $u \to +\infty$.*
2. *Déterminer un équivalent simple de $u_n$ quand $n \to +\infty$.*

## EXERCICE 3.61

*Déterminer le comportement asymptotique de la suite définie par*

$$\begin{cases} u_1 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+u_n} \end{cases}$$

## EXERCICE 3.62

*On considère les suites définies par*

$$\begin{cases} v_0 > u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} \ \text{ et } \ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n} \end{cases}$$

*Déterminer le comportement asymptotique de $u$ et de $v$.* On pourra considérer la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.